

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

par

Gérard PIRONNEAU

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1ère Thèse : Contribution à l'étude de l'enfoncement des pieux par vibropercuSSION, dans un milieu pulvérulent

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 10 avril 1974, devant la Commission d'Examen

M. BRILLOUET Président

M. VILAINÉ
M. GUEVEL } Examineurs

N° d'Ordre : 2 (1974)

N° CNRS : AO 9575

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

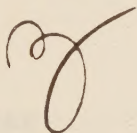
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Gérard PIRONNEAU

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : Contribution à l'étude de l'enfoncement des pieux
par vibropercussion, dans un milieu pulvérulent

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 10 avril 1974, devant la Commission d'Examen

M. BRILLOUET Président

M. VILAINE }
M. GUEVEL } Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555016_0022

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. SPARSEL Pharmacie

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES -

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. PAUC	«
	M. PETRESCO	«
	M. RAFFIN	«
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. RAVILLY (ENSM)	«
	M. TARDY (ENSM)	«
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	«
	M. COLLET	«
	M. MINN	«
	M. MEZENECV (ENSM)	«
	M. MOUTON	«
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	«
	M. MARTIN	«
	M. PIERI	«
	M. QUINIQU	«
	M. ROUXEL	«
	M. WOJTKOWIAK	«
	Melle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	«
	Mme L.E DOUARIN	«
	M. LE DOUARIN	«
	M. SELLIER	«
	M. CAVET	Sciences de la Terre
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	«
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	«
	M. LASKAR	«
	M. LE NOUR	«
	Melle OFFRET (ENSM)	«
	M. ROSIER	«

Professeurs sans chaire M. GOBIN (ENSM)

Chimie

M. TOURNOUX

«

M. CHABANEL

Biologie

M. DUPONT

«

M. SAUDRAY

«

M. OTTMANN

Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences M. DHOMBRES

Mathématiques

M. DO (ENSM)

«

M. GATESOUBE

«

M. GAPAILLARD

«

M. LAMEAU (ENSM)

«

M. LEBORGNE

«

M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)

«

M. VOGEL

«

M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement ENSM) Mécanique

M. GUEVEL (ENSM)

«

M. SULMONT (ENSM)

«

M. VAUSSY (Chargé d'Enseignement ENSM)

«

M. VILAINE (ENSM)

«

M. CAILLER (IUT)

Physique

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (IUT)

«

M. LE MAITRE

«

M. LONCKE

«

M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)

«

M. BOUCHY (IUT)

Chimie

M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement IUT)

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (ENSM)

«

M. AMOURIQ

Biologie

M. LEBRUN

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. NICOLAS

«

Secrétaire Général : M. LERAY

1911 - 1912

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

Le 11 de mai 1911, j'ai écrit à mes parents et à ma femme, leur disant que j'étais allé à la messe à 8 heures et que j'étais très content de les avoir écrits. Je leur ai dit que j'étais très content de les avoir écrits et que j'étais très content de les avoir écrits.

A mes parents,
A ma femme.

A V A N T - P R O P O S

Qu'il me soit permis ici d'adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur VILAINE, Directeur de l'E.N.S.M., pour m'avoir accueilli dans son laboratoire de Génie Civil, et du profond intérêt qu'il a accordé à la conduite de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur BRILLOUET, Directeur du Centre de Calcul de l'Université de Nantes, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur GUEVEL, responsable du laboratoire d'Hydrodynamique de l'E.N.S.M., qui a aimablement accepté de juger ce travail.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur BAUDET, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université d'Abidjan, pour les encouragements et les facilités qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur TAILLE pour les meilleurs conseils qu'il m'a donnés au cours de l'étude théorique.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collègues et au personnel technique, à Nantes ou à Abidjan, pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée et l'aide très amicale et efficace que j'ai trouvée auprès d'eux.

S O M M A I R E

INTRODUCTION	1
NOTATIONS	3
CHAPITRE 1 - ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME	7
1 - 1 Hypothèses	7
1.1.1. Sur le système vibropercuteur	7
1.1.2. Sur le système pieu - sol	7
1.1.3. Sur l'ensemble	7
1.1.4. Origines des temps et des déplacements	8
1 - 2 Etude du mouvement entre deux percussions consécutives	10
1 - 3 Percussions "régulières"	11
1 - 4 Remarques	12
1.4.1. Remarque fondamentale	12
1.4.2. Condition nécessaire et condition suffisante	13
1 - 5 Premiers résultats	13
1.5.1. Percussions "régulières" - Condition	13
1.5.2. Etude géométrique dans le plan de phase "réduit"	14
1.5.3. Périodicité	17
1 - 6 Relations complémentaires	18
1.6.1. Condition de contact des masses à la percussion	18
1.6.2. Coefficient de restitution de vitesse	18
1.6.3. Conservation de la quantité de mouvement	18
1.6.4. Conservation de l'énergie	19
1.6.5. Coefficient apparent de restitution	20
1 - 7 Résolution	20

.../...

1 - 8	Discussion de la solution suivant certaines valeurs des paramètres	23
1.8.1.	Etude pour F infini	23
1.8.2.	Etude pour r voisin de 1	24
1.8.3.	Etude des mouvements possibles du pieu	31
1 - 9	Détermination du maximum de V_{moy}	32
CHAPITRE 2 - ETUDE DE LA STABILITE		35
2 - 1	Principe	35
2 - 2	Etude théorique	35
2.2.1.	Conséquences de la perturbation sur le premier intervalle de percussion	35
2.2.2.	Sur le 2ème intervalle	37
2.2.3.	Propagation de la perturbation	38
2.2.4.	Résolution	40
2.2.5.	Remarques	42
2 - 3	Application au système étudié	43
CHAPITRE 3 - MOUVEMENT TRANSITOIRE		45
3 - 1	Mise en équation	45
3 - 2	Résolution	45
3.2.1.	Solution générale des équations sans second membre	45
3.2.2.	Solution particulière des équations complètes	46
3.2.3.	Solution des équations complètes	48
3 - 3	Calcul de Δt	49
3 - 4	Calcul de Δx_2	50
3 - 5	Calcul de Δx_1	51
3 - 6	Calcul de $\Delta \dot{x}_1$	52
CHAPITRE 4 - VALEURS NUMERIQUES ET GRAPHES THEORIQUES		53
4 - 1	Introduction	53
4 - 2	Réalisation approchée de la condition suffisante	54
4 - 3	Recherche des racines du polynôme du quatrième degré $B(T) = 0$	54
.../...		

4 - 4	Valeurs numériques et graphes	54
4.4.1.	Valeurs numériques des paramètres	54
4.4.2.	Programme de calcul	55
4.4.3.	Présentation des résultats	55
4.4.4.	Analyse des résultats	75
4 - 5	Variation du maximum de la vitesse moyenne d'enfoncement en fonction de l'interstice réel	75
CHAPITRE 5 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL		81
5 - 1	But	81
5 - 2	Dispositif expérimental	81
5.2.1.	Montage mécanique	81
5.2.1.1.	Description	81
5.2.1.2.	Caractéristiques techniques	83
5.2.2.	Circuit d'excitation	84
5.2.2.1.	Principe de l'excitateur	84
5.2.2.2.	Circuit d'excitation	84
5.2.3.	Circuit de mesure de la vitesse	85
5.2.3.1.	Principe du capteur-vitesse	85
5.2.3.2.	Perturbation du signal vitesse	85
5.2.3.3.	Elimination de la perturbation	87
5.2.3.4.	Circuit de mesure de la vitesse	90
5.2.4.	Circuit de mesure du déplacement	90
5.2.4.1.	Principe du capteur - déplacement	90
5.2.4.2.	Circuit de mesure du déplacement	91
5 - 3	Vérification des hypothèses	91
5.3.1.	Le système n'est pas amorti	91
5.3.1.1.	Mesure de l'amortissement	91
5.3.1.2.	Résultats	92
5.3.2.	Le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable	94
5.3.3.	La percussion est instantanée	94
5.3.4.	La durée de glissement du pieu est très petite devant la période du phénomène	95
5.3.5.	La force F est supérieure à toute force exercée par le ressort	95
5.3.6.	Le pieu est fixe entre deux percussions consécutives	95
5.3.7.	Le mouvement du percuteur est continu	95

5.3.8. La force de frottement est indépendante de la vitesse de l'enfoncement

96

5 - 4 Réglages et mesures

96

5.4.1. Mesure de la pulsation propre ω_0 du système

96

5.4.2. Mesure des masses

96

5.4.2.1. Masse m_1 du percuteur

96

5.4.2.2. Masse m_2 du système pieu + bâti

96

5.4.2.3. Coefficient sans dimension μ

97

5.4.3. Mesure de la raideur k du ressort

97

5.4.4. Mesure du déplacement relatif y du percuteur

97

5.4.4.1. Etalonnage du capteur - déplacement

97

5.4.4.2. Réglage et mesure de l'interstice e

98

5.4.5. Réglage et mesure de l'excitation

98

5.4.5.1. Etalonnage de l'excitateur

98

5.4.5.2. Réglage de E

98

5.4.5.3. Réglage de r

98

5.4.6. Mesure de la vitesse relative $\dot{y}$ du percuteur

98

5.4.6.1. Etalonnage du capteur - vitesse

98

5.4.6.2. Mesure de $\dot{X}_1$

102

5.4.6.3. Mesure du coefficient de restitution R

102

5.4.7. Mesure de la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu V_{moy}

102

5.4.8. Mesure de la force de frottement pieu - sol

102

5.4.8.1. Mesure du coefficient de frottement

102

5.4.8.2. Mesure de la force de frottement

102

5.4.9. Mesure de N

102

CHAPITRE 6 - RESULTATS EXPERIMENTAUX - CYCLES LIMITES

107

6 - 1 Généralités

107

6 - 2 Présentation et analyse des résultats

107

6.2.1. Plage d'accrochage automatique

107

6.2.2. Résultats

107

6.2.3. Observations

107

6.2.4. Photographies

107

6.2.5. Diagrammes

107

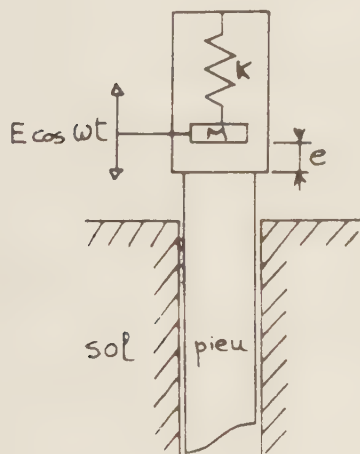
.../...

6 - 3	Conclusions	117
6 - 4	Cycles limites	117
6.4.1.	Généralités	117
6.4.2.	Réalisation des cycles limites	117
6.4.3.	Résultats	118
CONCLUSION		121
ANNEXE	- Programme de calcul	125
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		131
BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE		133

INTRODUCTION

La recherche de rendements plus élevés dans la réalisation de fondations profondes sur pieux ou palplanches a conduit les ingénieurs russes, en premier, puis les ingénieurs roumains, à mettre au point un nouveau matériel de fonçage : le vibromarteau ou vibropercuteur. Il utilise les vibrations forcées de systèmes mécaniques à un ou plusieurs degrés de liberté, avec déplacement limité d'un seul côté.

Le principe d'un système vibropercuteur avec déplacement limité d'un seul côté, est le suivant : un percuteur de masse M , relié à l'extrémité libre d'un ressort de raideur K , est soumis à une force sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude E , cette force ne dépendant pas de la nature du mouvement du pieu. L'autre extrémité du ressort est accrochée à un cadre rigide encastré sur la tête du pieu. Le pieu s'enfonce verticalement dans le sol.



Pour certaines valeurs de E et ω , le déplacement du percuteur atteint la valeur e ; il se produit alors une percussion.

J. VILAINÉ reprenant et complétant l'étude faite par D.D. BARKAN a étudié les lois régissant ce phénomène lorsque le pieu est remplacé par une butée fixe.

Il s'est limité, et nous ferons de même, aux mouvements "réguliers" (mouvements périodiques et chocs identiques).

Nous avons poursuivi cette étude en supposant que le pieu s'enfonce dans un milieu pulvérulent, ce qui ajoute un deuxième degré de liberté au système.

Nous avons supposé que la réaction du sol sur le pieu est réduite à un frottement sec constant (force constante s'opposant au mouvement). Le sol de référence étant pulvérulent, cette hypothèse est acceptable en première approximation. Nous avons négligé les modifications physicomécaniques du sol sous l'influence des vibrations et des chocs, ainsi que l'élasticité et l'inertie du sol (dans le cas d'un sol cohérent et "collant" au pieu, cette hypothèse n'est plus correcte : il suffit de s'approcher d'un pieu foncé par vibration ou par percussion, pour se rendre compte qu'une grande masse de sol peut être mise en mouvement). De plus, le pieu est supposé parfaitement rigide.

L'étude poursuivie est comparable à celles des "amortisseurs à chocs". Mais nous avons utilisé une solution géométrique dans le plan de phase "réduit", c'est-à-dire limité aux oscillations libres :

$$\left(X_{\lambda}, \frac{\dot{X}_{\lambda}}{\omega_0} \right)$$

Comme dans le cas de la butée fixe, nous avons retrouvé le résultat suivant : "entre deux percussions successives, le vibreur est le siège d'un mouvement forcé, "régulier", dont la période est un multiple de celle de la force d'excitation".

Puis nous avons recherché la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu et les domaines de stabilité de fonctionnement suivant les valeurs relatives des différents paramètres.

NOTATIONS

A	: amplitude des oscillations libres
A_0	: amplitude apparaissant dans les équations du mouvement transitoire.
E	: amplitude de la force appliquée au percuteur
F	: force de frottement, s'opposant au mouvement du pieu, diminuée de la composante, dans la même direction, du poids de l'ensemble vibropercuteur + pieu.
N	: nombre entier de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives.
R	: coefficient de restitution de vitesse
$T = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right)$	
$T_1 = \operatorname{tg} \psi_1$	
$V_{\text{moy}} = \frac{\Delta x_2}{\tau}$	: vitesse moyenne d'enfoncement du pieu
$\dot{X}_1^-$	: vitesse du percuteur immédiatement avant une percussion
$\dot{X}_1^+$	: vitesse du percuteur immédiatement après une percussion
$a = \frac{1+2\mu-R}{1+R}$	
$c = \operatorname{cotg} \frac{\omega_0 \tau}{2}$	
$d = \frac{E}{k}$	
e	: interstice (écart entre le percuteur et la tête du pieu lorsque le ressort k est dans sa position d'équilibre)
$\frac{e}{d} = \frac{ke}{E}$	: coefficient sans dimension
$f = \frac{F}{E}$	: coefficient sans dimension
k	: raideur du ressort du percuteur
m_1	: masse du percuteur
m_2	: masse de l'ensemble pieu + bâti
$r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	: coefficient sans dimension
t	: temps
$t = 0^+$	: origine des temps

$t = \tau^-$	: valeur immédiatement avant une percussion
$t = \tau'$	: valeur immédiatement après la même percussion
$t = \tau^+$	: valeur à la fin du glissement du pieu suivant cette même percussion
x_1	: déplacement absolu du percuteur
x_2	: déplacement absolu du pieu
$y = x_1 - x_2$	: déplacement relatif du percuteur
y_f	: terme des oscillations forcées dans y
y_λ	: terme des oscillations libres dans y
$\Delta_{p-1} = \sum_{i=1}^p \delta_{i-1}$	
$\Delta t = \tau^+ - \tau'$	: durée du glissement du pieu
Δx_1	: variation de x_1 au cours du glissement du pieu
$\Delta \dot{x}_1$	: variation de $\dot{x}_1$ au cours du glissement du pieu
Δx_2	: déplacement du pieu après une percussion
$\Delta x_d^{(i)}$ et $\Delta \dot{x}_d^{(i)}$	($i = 1, 2, \dots$) : écart sur les déplacements et les vitesses relatifs au début du $i^{\text{ème}}$ intervalle de percussion, entre le mouvement perturbé et le mouvement périodique.
$\Delta x_f^{(i)}$ et $\Delta \dot{x}_f^{(i)}$	($i = 1, 2, \dots$) : écart sur les déplacements et les vitesses relatifs à la fin du $i^{\text{ème}}$ intervalle de percussion, entre le mouvement perturbé et le mouvement périodique.
$\Delta V_1 = \dot{x}_1^+ - \dot{x}_1^-$	: variation instantanée de la vitesse du percuteur au cours de la percussion
ΔV_2	: variation instantanée de la vitesse du pieu au cours de la percussion
$\Delta \psi$	: déphasage du terme des oscillations libres au cours de la percussion
Φ	: déphasage de l'excitation par rapport à l'origine des temps
$\Phi_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \Phi$	
ψ	: déphasage du terme des oscillations libres par rapport à l'origine des temps
ψ_0	: déphasage apparaissant dans les équations du mouvement transitoire
$\psi_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \psi$	
$\Omega_2 = \omega_0 \sqrt{1+\mu}$	: pulsation apparaissant dans les équations du mouvement transitoire

α, β : coefficients des équations du mouvement transitoire

α_p ($p = 1, 2, \dots$) : perturbation sur A (en valeur relative)

δ_p ($p = 1, 2, \dots$) : perturbation sur Φ

θ_p ($p = 1, 2, \dots$) : perturbation sur ψ

θ : temps apparaissant dans les équations du mouvement transitoire

$\lambda = \frac{f - \frac{e}{d}}{\mu N \pi}$: coefficient sans dimension

$\mu = \frac{m_1}{m_2}$: coefficient sans dimension

τ : période des percussions "régulières"

ω : pulsation d'excitation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$: pulsation propre du système vibropercuteur

Chapitre 1

ETUDE THEORIQUE DU SYSTEME

Nous nous proposons de rechercher l'expression de la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu, V_{moy} , en fonction des paramètres du système. Celle-ci est définie par le rapport de l'enfoncement Δx_2 du pieu à chaque percussion, et de la période τ des percussions.

La connaissance d'une telle expression permet d'étudier l'influence de chaque paramètre, et d'en déduire le fonctionnement optimum du système.

1.1 - HYPOTHESES

L'étude est menée en tenant compte des hypothèses suivantes :

1.1.1 - Sur le système vibropercuteur

- le système n'est pas amorti
- le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable
- le bâti est indéformable
- la masse du bâti est incluse dans celle du pieu
- le mouvement du percuteur est continu ; en particulier, x_j ne varie pas au cours de la percussion : $x_j(\tau^-) = x_j(\tau')$.

1.1.2 - Sur le système pieu-sol

- le pieu est un solide parfait indéformable
- le sol entourant le pieu reste immobile
- l'interaction pieu-sol se réduit à un frottement "sec" (de Coulomb)
- la force qui s'oppose à l'enfoncement du pieu est indépendante de la fiche et de la vitesse d'enfoncement.

1.1.3 - Sur l'ensemble

- le système est monoaxial
- nous ne nous intéressons qu'au mouvement "régulier" : mouvement périodique et chocs identiques.

- le glissement Δx_2 du pieu est le même pour chaque percussion
- les vitesses $\dot{x}_1^-$ et $\dot{x}_1^+$ du percuteur avant et après la percussion sont constantes
- la percussion est instantanée : $\tau' = \tau^-$
- la durée du glissement du pieu est très petite devant la période du phénomène : $\Delta t = \tau^+ - \tau' \ll \tau$; nous simplifions en disant que le déplacement du pieu est instantané : $\Delta t = 0$
- x_1 et $\dot{x}_1$ ne varient pas au cours du glissement :
$$\Delta x_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \dot{x}_1 = 0$$
- le pieu reste fixe entre deux percussions consécutives
- la force F est toujours supérieure à toute force exercée par le ressort.

Certaines hypothèses seront discutées et précisées ultérieurement.

1.1.4 - Origines des temps et des déplacements

Elles sont précisées sur la figure 1.1.

L'indice supérieur "-" correspond à l'instant ultime précédant une percussion.

L'indice supérieur "," indique que la percussion, instantanée, vient d'avoir lieu. Les vitesses ont brusquement variées. La vitesse du percuteur passe de $\dot{x}_1^-$ à $\dot{x}_1^+$; celle du pieu passe de 0 à ΔV_2 . Les déplacements restent inchangés.

L'indice supérieur "+" indique que le pieu s'est enfoncé de Δx_2 et que sa vitesse vient de s'annuler.

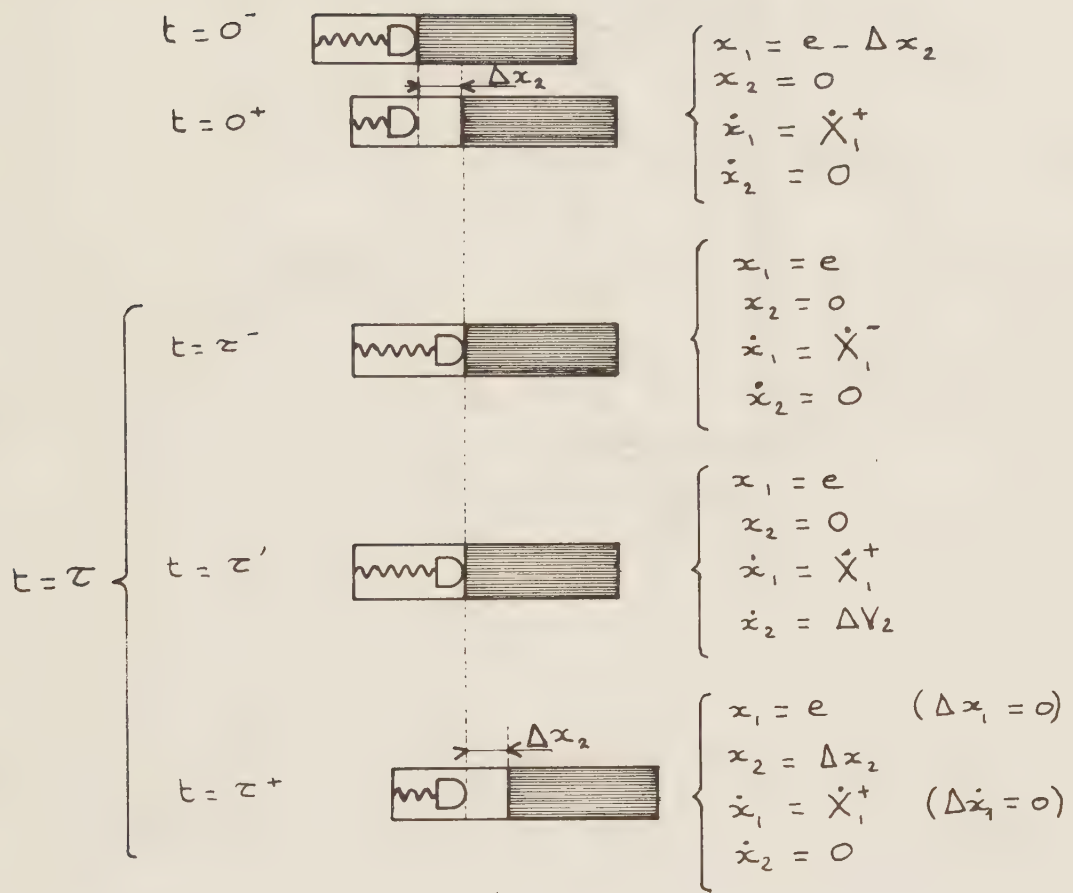


Fig. 1.1

1.2 - ETUDE DU MOUVEMENT ENTRE DEUX PERCUSSIONS CONSECUTIVES

Le système étudié est schématisé par la figure 1.2.

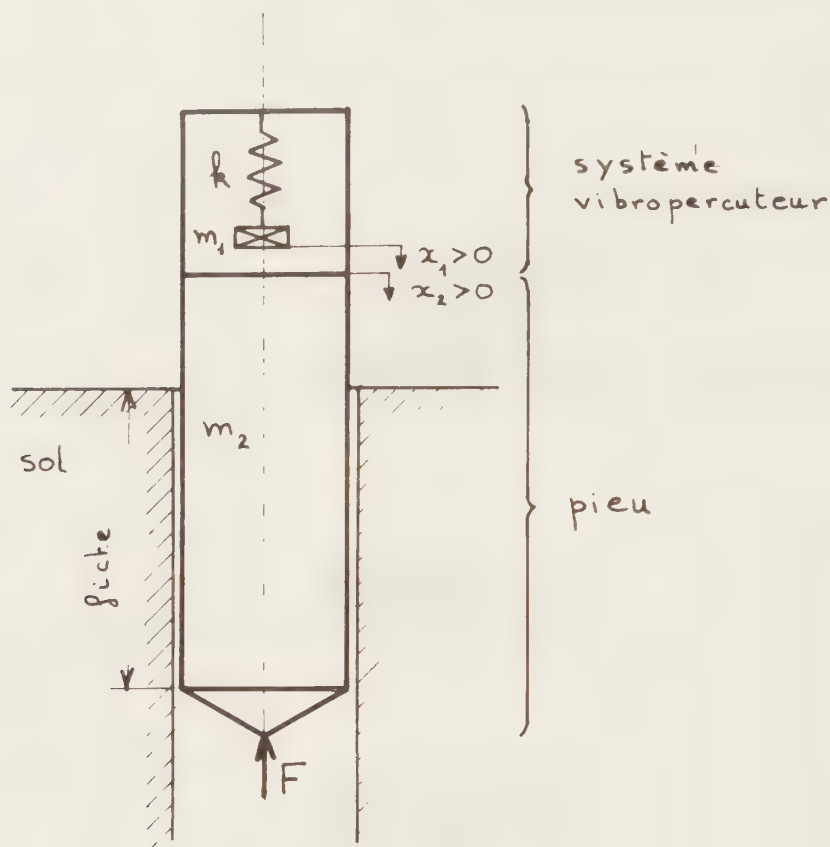


Fig. 1.2

Les déplacements x_i ($i = 1, 2$) sont comptés positivement vers le bas.

Les vitesses et les accélérations sont notées respectivement :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$$

$i = \{1, 2\}$

L'équation différentielle régissant le mouvement du vibropercuteur s'écrit :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) + E \cos(\omega t + \phi)$$

La fonction déplacement $x_2(t)$ du pieu est constante entre deux percussions consécutives.

En dehors de la résonance, les solutions sont de la forme :

$$x_1 = x_2 + A \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{E}{k - m_1 \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

Les quantités A et ψ sont des constantes dépendant des conditions initiales (c'est-à-dire des conditions existant au début de chaque intervalle séparant deux percussions consécutives ; celles-ci sont étudiées au paragraphe 1.3). Dans toute la suite de l'étude, nous supposons que l'amplitude A des oscillations libres est positive. Ceci fixe la détermination du déphasage ψ .

En posant $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $d = \frac{E}{k}$, nous obtenons, entre deux percussions consécutives, en dehors de la résonance ($r \neq 1$) :

$$x_1 = x_2 + A \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos (\omega t + \phi) \quad |1.2.1|$$

et

$$\dot{x}_1 = -A \omega_0 \sin (\omega_0 t + \psi) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin (\omega t + \phi) \quad |1.2.2|$$

1.3 - PERCUSSIONS "REGULIERES"

Choisissons comme origine des temps l'instant d'une percussion. Le mouvement étant périodique, de période τ , adoptons comme notations :

- $t = 0^-$ immédiatement avant la 1ère percussion
- $t = 0^+$ immédiatement après la 1ère percussion
- $t = \tau^-$ immédiatement avant la 2ème percussion
- $t = \tau^+$ immédiatement après la 2ème percussion
-
- $t = p\tau^-$ immédiatement avant la (p+1)^{ème} percussion
- $t = p\tau^+$ immédiatement après la (p+1)^{ème} percussion

avec p entier quelconque.

Notons Δx_2 le déplacement du pieu au cours de la percussion.

Les conditions initiales s'écrivent alors :

déplacement du percuteur :

$$\begin{aligned} x_1(\tau^-) &= x_1(\tau^+) = e \\ &\dots\dots\dots \\ x_1(p\tau^-) &= x_1(p\tau^+) = e + (p-1) \Delta x_2 \end{aligned} \quad |1.3.1|$$

vitesse du percuteur :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^- &= \dot{x}_1(\tau^-) = \dots\dots = \dot{x}_1(p\tau^-) \\ \dot{x}_1^+ &= \dot{x}_1(\tau^+) = \dots\dots = \dot{x}_1(p\tau^+) \end{aligned} \quad |1.3.2|$$

déplacement du pieu :

$$x_2(\tau^-) = 0$$

$$x_2(\tau^+) = \Delta x_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_2(p\tau^-) = (p-1) \Delta x_2$$

$$x_2(p\tau^+) = p \cdot \Delta x_2$$

| 1.3.3 |

déplacement relatif du percuteur :

$$y(\tau^-) = \dots\dots\dots = y(p\tau^-) = e$$

$$y(\tau^+) = \dots\dots\dots = y(p\tau^+) = e - \Delta x_2$$

| 1.3.4 |

vitesse relative du percuteur :

$$\dot{y}(\tau^-) = \dots\dots\dots = \dot{y}(p\tau^-) = \dot{x}_1^-$$

$$\dot{y}(\tau^+) = \dots\dots\dots = \dot{y}(p\tau^+) = \dot{x}_1^+$$

| 1.3.5 |

1.4 - REMARQUES

1.4.1 - Remarque fondamentale

La percussion provoque une discontinuité de la vitesse de la masse m_1 ; la vitesse passe instantanément de la valeur $\dot{x}_1^-$, positive, à la valeur $\dot{x}_1^+$, positive ou négative (cf. figure 1.3).

L'excitation est sinusoïdale et continue et, par suite, à dérivées continues. La discontinuité ne peut donc se produire que sur le terme relatif aux oscillations libres de l'équation de la vitesse | 1.2.2 | :

A $\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi)$ pour $p = \tau, 2\tau, \dots, p\tau, \dots$

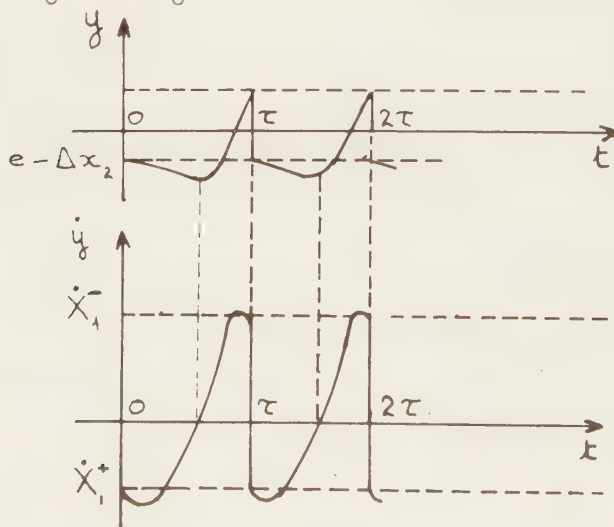


Fig. 1.3

Les percussions étant identiques entre elles, l'amplitude A des oscillations libres est une constante ; elle est donc indépendante du temps t.

Ainsi, la seule variation instantanée possible ne peut provenir que du déphasage ψ à chaque percussion.

Notons $\Delta\psi$ cette variation.

1.4.2 - Condition nécessaire et condition suffisante

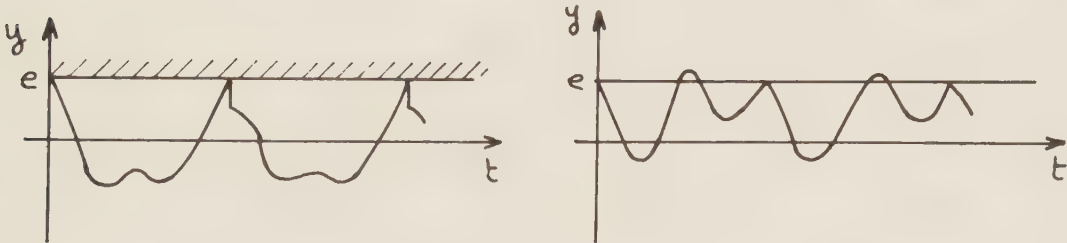
Les conditions initiales expriment la régularité et la périodicité des percussions, ce qui satisfait à la condition nécessaire.

La condition suffisante est telle que le déplacement du percuteur ne peut être supérieur à l'interstice e entre deux percussions consécutives.

$$y < e \quad \text{pour} \quad p\tau < t < (p+1)\tau, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

| 1.4.2.1 |

La figure 1.4 illustre ces conditions :



condition nécessaire et condition
suffisante satisfaites

condition nécessaire satisfaite
condition suffisante non satisfaite

Fig. 1.4

1.5 - PREMIERS RESULTATS

1.5.1 - Percussions "régulières" - Conditions

Eu égard à la remarque faite en 1.4.1 et aux conditions initiales, les équations | 1.2.1 | et | 1.2.2 | deviennent, pour $t = 0^+$, $t = \tau^+$ et pour toute valeur de r différente de l'unité :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0^+ : e - \Delta x_2 = A \cos \psi + \frac{d}{1-r^2} \cos \phi \end{array} \right. \quad | 1.5.1.1 |$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \tau^+ : e = \Delta x_2 + A \cos(\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega \tau + \phi) \end{array} \right. \quad | 1.5.1.2 |$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0^+ : \dot{x}_1^+ = -A\omega_0 \sin \psi - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin \phi \end{array} \right. \quad | 1.5.1.3 |$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \tau^+ : \dot{x}_1^+ = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi + \Delta \psi) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin(\omega \tau + \phi) \end{array} \right. \quad | 1.5.1.4 |$$

soit, en identifiant | 1.5.1.1 | et | 1.5.1.2 | d'une part, | 1.5.1.3 | et | 1.5.1.4 | d'autre part :

$$\begin{cases} A [\cos \psi - \cos (\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi)] = \frac{d}{1-r} [\cos(\omega\tau + \Phi) - \cos \Phi] \\ A [\sin \psi - \sin (\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi)] = \frac{dr}{1-r} [\sin(\omega\tau + \Phi) - \sin \Phi] \end{cases}$$

Le système précédent doit être vérifié quelle que soit la valeur de r (dans la mesure où les percussions existent, la mise en équation étant faite sous cette condition), ce qui implique :

$$\text{d'une part : } \begin{cases} \cos \psi = \cos (\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi) \\ \sin \psi = \sin (\omega_0 \tau + \psi + \Delta\psi) \end{cases}$$

$$\text{soit : } \boxed{\omega_0 \tau + \Delta\psi = 2n\pi} \quad (n \text{ entier}) \quad |1.5.1.5|$$

$$\text{d'autre part : } \begin{cases} \cos \Phi = \cos (\omega\tau + \Phi) \\ \sin \Phi = \sin (\omega\tau + \Phi) \end{cases}$$

$$\text{soit : } \boxed{\omega\tau = 2N\pi} \quad (N \text{ entier}) \quad |1.5.1.6|$$

ce qui peut s'exprimer :

Le nombre de cycles décrits par l'excitation entre deux percussions consécutives est un entier.

Nous obtenons ainsi :

$$\boxed{\omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r}} \quad |1.5.1.7|$$

1.5.2 - Etude géométrique dans le plan de phase "réduit"

Le déplacement relatif du percuteur, défini par $y = x_1 - x_2$, est la somme de 2 termes :

- le terme des oscillations libres : $y_\ell = A \cos (\omega_0 t + \psi)$
- le terme des oscillations forcées : $y_f = \frac{d}{1-r} \cos (\omega t + \Phi)$

Les conditions initiales peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} y(0^+) = y(0^-) - \Delta x_2 \\ y_f(0^+) = y_f(0^-) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } y_\ell(0^+) = y_\ell(0^-) - \Delta x_2 \quad |1.5.2.1|$$

$$\text{puis : } \begin{cases} \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) + \Delta \dot{y} \\ \dot{y}_f(0^+) = \dot{y}_f(0^-) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \dot{y}_\ell(0^+) = \dot{y}_\ell(0^-) + \Delta \dot{y} \quad |1.5.2.2|$$

Dans le plan de phase "réduit", ne faisant intervenir que y_ℓ , le point courant se déplace sur un arc de cercle, entre deux percussions successives (figure 1.5).

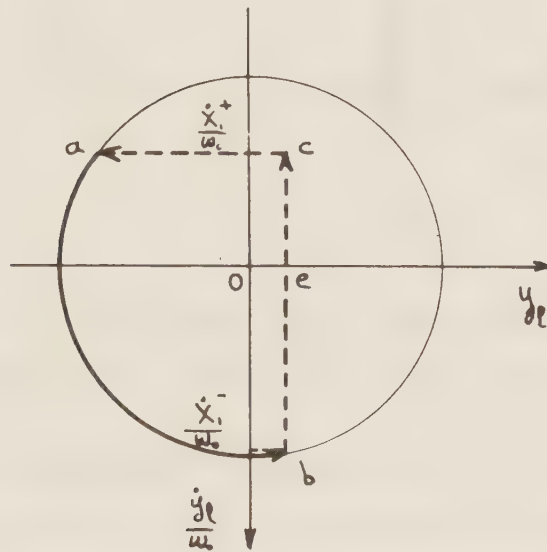


Fig. 1.5

La variation instantanée de vitesse est : $\Delta \dot{y}_\ell = \Delta V_1 = \omega_0 \times \overline{bc}$

L'enfoncement du pieu est : $\Delta x_2 = \overline{ac}$

En tenant compte de ces remarques, la condition d'accrochage peut être représentée dans le plan de phase "réduit" $(x_1, \frac{\dot{x}_1}{\omega_0})$ (figure 1.6).

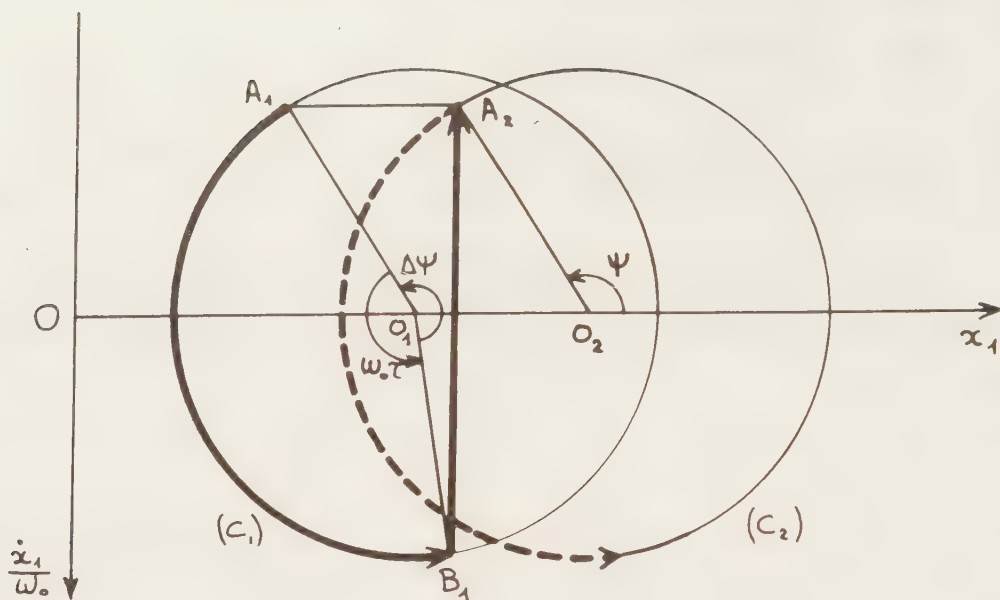


Fig. 1.6

Le point représentatif du déplacement libre du percuteur se déplace sur l'arc A_1B_1 du cercle (C_1) , de rayon A , entre deux percussions consécutives.

En B_1 , a lieu une percussion qui fait remonter le point courant en A_2 , sur un cercle (C_2) , déduit du cercle (C_1) par une translation d'amplitude Δx_2 dans la direction de l'axe x_1 .

B_1A_2 est parallèle à l'axe $(\frac{\dot{x}_1}{\omega_0})$, ce qui exprime que x_1 ne varie pas au cours de la percussion.

La variation instantanée de la vitesse du percuteur est :

$$\frac{\Delta V_1}{\omega_0} = \overline{B_1 A_2}$$

L'enfoncement du pieu est : $\Delta x_2 = \overline{O_1 O_2} = \overline{A_1 A_2}$

La période τ est liée à l'arc A_1B_1 par la relation :

$$(\overrightarrow{O_1 A_1}, \overrightarrow{O_1 B_1}) = \omega_0 \tau$$

Le déphasage instantané est : $\Delta \psi = (\overrightarrow{O_1 B_1}, \overrightarrow{O_1 A_1}) = (\overrightarrow{O_1 B_1}, \overrightarrow{O_2 A_2})$

L'égalité [1.5.1.5] peut se déduire directement de l'étude géométrique :

$$(\overrightarrow{O_1 A_1}, \overrightarrow{O_1 B_1}) + (\overrightarrow{O_1 B_1}, \overrightarrow{O_2 A_2}) = \omega_0 \tau + \Delta \psi = 2 n \pi$$

Quel que soit le réglage du système vibropercuteur, nous aurons toujours l'inégalité :

$$\boxed{\Delta x_2 < 2A} \quad |1.5.2.3|$$

Le calcul de Δx_2 et de $\frac{\Delta V_1}{\omega_0}$ se déduit de l'égalité :

$$\overrightarrow{O_1 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 B_1} + \overrightarrow{B_1 O_1} = \vec{0} \quad |1.5.2.4|$$

Projetons cette égalité sur l'axe x_1 :

$$A \cos \psi + \Delta x_2 - A \cos (\omega_0 \tau + \psi) = 0$$

soit :

$$\boxed{\Delta x_2 = A [\cos (\omega_0 \tau + \psi) - \cos \psi] = -2A \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \sin \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right)} \quad |1.5.2.5|$$

Projetons l'égalité |1.5.2.4| sur l'axe $\left(\frac{\dot{x}_1}{\omega_0} \right)$:

$$-A \sin \psi - \frac{\Delta V_1}{\omega_0} + A \sin (\omega_0 \tau + \psi) = 0$$

soit :

$$\boxed{\Delta V_1 = A \omega_0 [\sin (\omega_0 \tau + \psi) - \sin \psi] = 2A \omega_0 \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right)} \quad |1.5.2.6|$$

Des égalités |1.5.2.5| et |1.5.2.6| ressort l'importance de l'argument $\left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right)$. Nous essaierons d'exprimer toutes les équations en fonction de cet argument.

1.5.3 - Périodicité

La périodicité exprime qu'aux instants $t = t_1$, $t = t_1 + \tau$, ..., $t = t_1 + p\tau$, les positions et les vitesses relatives du percuteur sont respectivement identiques, quelque soient t_1 et p (entier).

En tenant compte, à chaque percussion, du déphasage instantané $\Delta\psi$, l'équation du mouvement "régulier" s'écrit pour $p = 1, 2, \dots$:

$$t = t_1 : x_1 = A \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{1-r} \cos (\omega t + \Phi)$$

$$t = t_1 + \tau : x_1 = \Delta x_2 + A \cos (\omega_0 t + \psi + \Delta\psi) + \frac{d}{1-r} \cos (\omega t + \Phi)$$

et ainsi de suite.

Par récurrence, nous obtenons :

$$\boxed{x_1 = p \cdot \Delta x_2 + A \cos (\omega_0 t + \psi + p \cdot \Delta\psi) + \frac{d}{1-r} \cos (\omega t + \Phi)} \quad |1.5.3.1|$$

$$\dot{x}_1 = -A \omega_0 \sin (\omega_0 t + \psi + p \cdot \Delta\psi) - \frac{d\omega}{1-r} \sin (\omega t + \Phi) \quad |1.5.3.2|$$

1.6 - RELATIONS COMPLEMENTAIRES

1.6.1 - Condition de contact des masses à la percussion

Au temps $t = \tau^-$, nous avons : $x_1(\tau^-) = x_2(\tau^-) + e$
qui s'exprime :

$$e = A \cos (\omega_o \tau + \psi) + \frac{d}{1-r} \cos \phi \quad |1.6.1.1|$$

1.6.2 - Coefficient de restitution de vitesse

La vitesse du percuteur a pour expression :

au temps $t = \tau^-$: $\dot{x}_1^- = -A \omega_o \sin (\omega_o \tau + \psi) - \frac{d\omega}{1-r} \sin \phi \quad |1.6.2.1|$

et au temps $t = \tau^+$: $\dot{x}_1^+ = -A \omega_o \sin \psi - \frac{d\omega}{1-r} \sin \phi \quad |1.6.2.2|$

Il existe une relation entre les vitesses du percuteur et du pieu, avant et après la percussion, en fonction de la nature du choc :

$$\dot{x}_1(\tau^+) - \dot{x}_2(\tau^+) = -R[\dot{x}_1(\tau^-) - \dot{x}_2(\tau^-)] \quad |1.6.2.3|$$

Le coefficient R est appelé coefficient de restitution de vitesse.

R = 0 correspond à un choc mou

R = 1 correspond à un choc parfait

R reste compris entre 0 et 1

$$0 \leq R \leq 1 \quad |1.6.2.4|$$

Des équations |1.6.2.1| et |1.6.2.2|, nous obtenons pour

$$\Delta V_1 = \dot{x}_1^+ - \dot{x}_1^- :$$

$$\Delta V_1 = A \omega_o [\sin (\omega_o \tau + \psi) - \sin \psi]$$

relation qui est semblable à |1.5.2.6|

1.6.3 - Conservation de la quantité de mouvement

S'il n'y a pas de percussion extérieure au système vibropercuteur, il y a conservation de la quantité de mouvement au cours de la percussion :

$$m_1 \Delta V_1 + m_2 \Delta V_2 = 0 \quad |1.6.3.1|$$

ΔV_1 et ΔV_2 étant respectivement les variations des vitesses du percuteur et du pieu au cours de la percussion.

Posons $\mu = \frac{m_1}{m_2}$, coefficient sans dimension.

L'équation |1.6.3.1| devient :

$$\mu \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0 \quad |1.6.3.2|$$

soit encore :

$$\mu [\dot{x}_1(\tau^+) - \dot{x}_1(\tau^-)] + [\dot{x}_2(\tau^+) - \dot{x}_2(\tau^-)] = 0 \quad |1.6.3.3|$$

Avant la percussion, la vitesse du pieu est nulle : $\dot{x}_2(\tau^-) = 0$,
et, par suite : $\Delta V_2 = \dot{x}_2(\tau^+)$

Compte tenu de ces résultats, éliminons $\dot{x}_1(\tau^+)$ et $\dot{x}_2(\tau^+) = \Delta V_2$
entre les équations |1.6.2.3|, |1.6.3.2| et |1.6.3.3| ; il vient :

$$(1+\mu) \Delta V_1 + (1+R) \dot{x}_1^- = 0 \quad |1.6.3.4|$$

Nous avons aussi :

$$\dot{x}_1^+ = - \frac{R-\mu}{1+\mu} \dot{x}_1^- \quad |1.6.3.5|$$

$$\text{et} \quad \Delta V_2 = \mu \frac{1+R}{1+\mu} \dot{x}_1^- \quad |1.6.3.6|$$

1.6.4 - Conservation de l'énergie

L'énergie cinétique reçue par le pieu au cours de la percussion
est égale à $\frac{1}{2} m_2 (\Delta V_2)^2$.

Le travail des forces appliquées au pieu pendant le déplacement
 Δx_2 est $F \times \Delta x_2$.

La variation d'énergie potentielle du ressort est, en supposant
 x_1 constant au cours du glissement du pieu :

$$\frac{1}{2} k (e - \Delta x_2)^2 - \frac{1}{2} k e^2$$

Le théorème de conservation de l'énergie totale du système s'écrit
alors :

$$\frac{1}{2} m_2 (\Delta V_2)^2 = F \cdot \Delta x_2 + \frac{1}{2} k (e - \Delta x_2)^2 - \frac{1}{2} k e^2$$

$$\text{soit :} \quad \frac{1}{2} m_2 (\Delta V_2)^2 = (F - k e) \Delta x_2 + \frac{1}{2} k (\Delta x_2)^2 \quad |1.6.4.1|$$

Δx_2 étant supposé petit, le dernier terme peut être négligé
($\frac{1}{2} k \Delta x_2 \ll F - k e$). L'équation |1.6.4.1| devient alors :

$$(\Delta V_2)^2 = 2\mu\omega_0^2 (fd - e) \cdot \Delta x_2 \quad |1.6.4.2|$$

Nous avons $fd - e > 0$, soit $F > k e$, d'après une hypothèse du
paragraphe 1.1.3.

1.6.5 - Coefficient apparent de restitution de vitesse

Nous pouvons définir un coefficient apparent de restitution de vitesse R' par la relation :

$$\dot{x}_1^+ = - R' \dot{x}_1^- \quad |1.6.5.1|$$

R' se calcule à partir des équations |1.6.2.3| et |1.6.3.3|

$$R' = \frac{R-\mu}{1+\mu} \quad |1.6.5.2|$$

Nous remarquons que R' peut être négatif.

$$\text{Nous obtenons, par ailleurs : } \Delta V_2 = \dot{x}_2(\tau') = \mu(1+R') \dot{x}_1^- \quad |1.6.5.3|$$

1.7 - RESOLUTION

Nous désirons exprimer A , ψ , Φ , $\Delta\psi$ et Δx_2 , qui sont les inconnues de l'équation |1.5.3.1|, et les vitesses $\dot{x}_1^-$, ΔV_1 , ΔV_2 et $V_{\text{moy}} = \frac{\Delta x_2}{\tau}$ (définie comme la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu), en fonction des paramètres connus : e , d , r , f , μ , R , N , n .

Pour cela, nous disposons du système des équations encadrées dans les paragraphes précédents.

$$\left. \begin{array}{l} |1.5.1.5| \\ |1.5.1.7| \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta\psi = 2\pi \left(n - \frac{N}{r}\right)} \quad |1.7.1|$$

Remplaçons dans |1.6.4.2|, ΔV_2 et Δx_2 par leurs valeurs, en utilisant les équations |1.5.2.5|, |1.5.2.6| et |1.6.3.2|.

$$4 \mu^2 A^2 \omega_o^2 \sin^2 \frac{\omega_o \tau}{2} \cos^2 \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) = - 4 \mu \omega_o^2 (fd-e) A \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \sin \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right)$$

Pour continuer le calcul, nous allons écarter certaines valeurs :

- $A = 0$: ce cas ne nous intéresse pas

- $\sin \frac{\omega_o \tau}{2} = 0$: soit $\omega_o \tau = 2k\pi$ (k entier)

c'est un cas limite où il y a contact, mais à vitesse nulle (voir figure 1.6)

- $\sin \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) = 0$ ou $\cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) = 0 \Rightarrow A = 0$

Posons alors :

$$\boxed{T = \text{tg} \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right)} \quad |1.7.2|$$

quantité dont la connaissance permet de calculer ψ (deux déterminations possibles).

Les différentes quantités peuvent s'exprimer en fonction de T.

Nous obtenons :

$$A = - \frac{fd-e}{\mu} \frac{T}{\sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right)} \quad |1.7.3|$$

A est une quantité que nous avons supposée positive ; d'où la condition :

$$T \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) < 0 \quad |1.7.4|$$

et A peut être calculé à partir de :

$$A = \frac{fd-e}{\mu} \left| \frac{T}{\sin \frac{\omega_o \tau}{2}} \right| \sqrt{1+T^2} \quad |1.7.5|$$

Le déphasage Φ est défini par son sinus et son cosinus. $\cos \Phi$ est déduit de l'équation |1.6.1.1| où l'on remplace A par sa valeur trouvée en |1.7.3|.

$$\begin{aligned} \frac{d}{1-r^2} \cos \Phi &= e - A \cos (\omega_o \tau + \psi) \\ &= e - A \left[\cos \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) - \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \sin \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) \right] \\ &= e - A \left[\cotg \frac{\omega_o \tau}{2} - T \right] \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) \end{aligned}$$

$$\text{en posant : } c = \cotg \frac{\omega_o \tau}{2} = \cotg \frac{N\pi}{r} \quad |1.7.6|$$

$$\text{il vient : } \frac{d}{1-r^2} \cos \Phi = e + \frac{fd-e}{\mu} T (c-T) \quad |1.7.7|$$

$\sin \Phi$ est déduit de l'équation |1.6.2.1| où l'on remplace $\dot{X}_1^-$ et A par leurs valeurs trouvées à partir de |1.6.3.4|, |1.5.2.6| et |1.7.3|

$$\begin{aligned} \frac{d}{1-r^2} \sin \Phi &= \frac{A}{r} \left[-\sin(\omega_o \tau + \psi) + 2 \frac{1+\mu}{1+R} \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) \right] \\ &= \frac{A}{r} \left[-1-cT+2 \frac{1+\mu}{1+R} \right] \sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) \end{aligned}$$

il vient :

$$\frac{d}{1-r^2} \sin \Phi = \frac{fd-e}{\mu r} T (cT-a) \quad |1.7.8|$$

en posant :

$$a = \frac{1+2\mu-R}{1+R} \geq 0$$

Pour calculer $T = \text{tg} \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right)$, éliminons Φ entre les équations |1.7.7| et |1.7.8|.

$$\frac{d^2}{(1-r^2)^2} = \left[e + \frac{fd-e}{\mu} T (c-T) \right]^2 + \frac{(fd-e)^2}{\mu^2 r^2} T^2 (cT-a)^2 \quad |1.7.9|$$

Nous obtenons une équation du 4ème degré permettant de calculer T. Si e n'est pas nul, elle peut s'écrire, après simplifications, et en utilisant les coefficients sans dimension :

$$B(T) = \left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) T^4 - 2c \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) T^3 + \left[c^2 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2\mu}{f(\frac{d}{e}) - 1} \right] T^2 + \frac{2\mu}{f(\frac{d}{e}) - 1} cT + \left[1 - \left(\frac{d/e}{1-r^2}\right)^2 \right] \left[\frac{\mu}{f(\frac{d}{e}) - 1} \right]^2 = 0 \quad |1.7.10|$$

Nous ne retenons que les valeurs réelles de T et la valeur correspondante de ψ (deux déterminations pour chaque valeur réelle de T). La racine $T = 0$ est possible pour $\frac{e}{d} = \pm \frac{1}{1-r^2}$.

Calculons les autres quantités cherchées en fonction de T :

$$\Delta x_2 = 2 \frac{fd-e}{\mu} T^2 \quad |1.7.11|$$

Cette quantité est toujours positive (ou à la limite, nulle).

$$\Delta V_1 = - 2 \frac{fd-e}{\mu} \omega_o T \quad |1.7.12|$$

$$\Delta V_2 = 2 (fd-e) \omega_o T \quad |1.7.13|$$

$$\dot{X}_1^- = 2 \frac{fd-e}{\mu} \cdot \frac{1+\mu}{1+R} \omega_o T \quad |1.7.14|$$

$$V_{\text{moy}} = \frac{fd-e}{\mu} \frac{r}{N\pi} \omega_o T^2 \quad |1.7.15|$$

La vitesse de percussion $\dot{X}_1^-$ doit être positive (et par suite $\Delta V_1 < 0$, $\Delta V_2 > 0$ et $V_{\text{moy}} > 0$), ce qui impose que l'on doit choisir pour T une racine positive de l'équation |1.7.10|.

$$T > 0 \quad |1.7.16|$$

L'inégalité |1.7.4| devient alors :

$$\sin \frac{\omega_o \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_o \tau}{2} + \psi \right) < 0 \quad |1.7.17|$$

La connaissance de T donne deux valeurs pour ψ , différant de π .
L'inégalité |1.7.17| permet de déterminer celle qui convient à notre problème.

Pour l'étude numérique sur ordinateur, les quantités précédentes sont mises sous forme de grandeurs sans dimension en divisant les longueurs par e et les vitesses par $\omega_0 e$; ainsi nous avons :

$$\frac{A}{e} = - \frac{f(\frac{d}{e}) - 1}{\mu} \cdot \frac{T}{\sin \frac{\omega_0 T}{2} \cos (\frac{\omega_0 T}{2} + \psi)} \quad |1.7.18|$$

$$\frac{\Delta x_2}{e} = 2 \frac{f(\frac{d}{e}) - 1}{\mu} \cdot T^2 \quad |1.7.19|$$

$$\frac{\Delta V_1}{\omega_0 e} = - 2 \frac{f(\frac{d}{e}) - 1}{\mu} T \quad |1.7.20|$$

$$\frac{\Delta V_2}{\omega_0 e} = 2 [f(\frac{d}{e}) - 1] T \quad |1.7.21|$$

$$\frac{\dot{x}_1}{\omega_0 e} = 2 \frac{f(\frac{d}{e}) - 1}{\mu} \cdot \frac{1+\mu}{1+R} \cdot T \quad |1.7.22|$$

$$\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = \frac{f(\frac{d}{e}) - 1}{\mu} \cdot \frac{r}{N\pi} \cdot T^2 \quad |1.7.23|$$

1.8 - DISCUSSION DE LA SOLUTION SUIVANT CERTAINES VALEURS DES PARAMETRES

1.8.1 - Etude pour F infini

L'équation |1.7.10| permettant de calculer T se réduit à :

$$\left[1 + \frac{c^2}{r^2}\right] T^4 - 2c \left[1 + \frac{a}{r^2}\right] T^3 + \left[c^2 + \frac{a^2}{r^2}\right] T^2 = 0$$

ou
$$T^2 \left[(T-c)^2 + \frac{1}{2} (cT-a)^2 \right] = 0$$

La seule solution possible est $T = 0$

soit : $\text{tg} \left(\frac{\omega_0 T}{2} + \psi \right) = 0$

ou $\omega_0 T + 2\psi = 0 \quad (\text{mod. } 2\pi)$

En rapprochant cette égalité de |1.5.1.5|, nous trouvons :

$$\Delta\psi = 2\psi \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

Dans ce cas, le pieu devient une butée fixe. Ce problème a été étudié par J. VILAIN.

1.8.2 - Etude pour r voisin de 1

Un système vibrant à un degré de liberté, soumis à une excitation de fréquence identique à sa fréquence propre, entre en résonance. Si le système n'est pas amorti, l'amplitude augmente indéfiniment.

Par contre, pour le système étudié, avec déplacement limité d'un côté, les vitesses avant et après percussion restent finies quand r tend vers l'unité par valeurs supérieures ou inférieures.

Posons : $r = 1 + \varepsilon$ | 1.8.2.1 |

ε tendant vers 0 par valeurs supérieures ou inférieures lorsque r tend vers 1.

Effectuons les développements limités des expressions suivantes :

$$\frac{1}{1-r^2} = \frac{1}{-2\varepsilon(1 + \frac{\varepsilon}{2})} \sim \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2}}{-2\varepsilon} \quad | 1.8.2.2 |$$

$$\frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{N\pi}{1+\varepsilon} \sim N\pi (1-\varepsilon)$$

$$c = \cotg \frac{\omega_0 \tau}{2} \sim - \cotg [N\pi\varepsilon(1-\varepsilon)]$$

$$c \sim - \frac{1+\varepsilon}{N\pi\varepsilon} \quad | 1.8.2.3 |$$

$$1.8.2.1 - \text{Développement limité de } T = \tg \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right)$$

Appelons ψ_1 la limite, si elle existe, du déphasage ψ lorsque r tend vers 1 :

$$\psi_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \psi$$

de même, appelons :

$$T_1 = \lim_{r \rightarrow 1} T = \tg \psi_1 > 0$$

Posons :

$$\psi = \psi_1 + \alpha\varepsilon \quad | 1.8.2.1.1 |$$

au voisinage de $r = 1$ et effectuons un développement limité de T :

$$T \sim \operatorname{tg} (-N\pi\epsilon + \psi_1 + \alpha\epsilon)$$

$$\sim \frac{\operatorname{tg} \psi_1 + \epsilon(\alpha - N\pi)}{1 - \epsilon(\alpha - N\pi) \operatorname{tg} \psi_1}$$

$$T \sim T_1 \left[1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi) \epsilon \right] \quad |1.8.2.1.2|$$

1.8.2.2 - Limite de $\cos \phi$

Effectuons un développement limité de $\cos \phi$:

$$\cos \phi \sim -2\epsilon \times \frac{f - \frac{e}{d}}{\mu} T_1 \left[1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi) \epsilon \right] \left[-\frac{1+\epsilon}{N\pi\epsilon} - T_1 \right]$$

$$\text{soit : } \cos \phi \sim 2 \lambda T_1 \left[1 + \epsilon \left(1 - \frac{N\pi}{T_1} + \frac{1+T_1^2}{T_1} \alpha \right) \right] \quad |1.8.2.2.1|$$

$$\text{après avoir posé : } \lambda = \frac{f - \frac{e}{d}}{\mu N\pi} > 0$$

$$\text{Appelons } \phi_1 = \lim_{r \rightarrow 1} \phi$$

$$\cos \phi \text{ a pour limite : } \cos \phi_1 = 2\lambda T_1 > 0 \quad |1.8.2.2.2|$$

1.8.2.3 - Limite de $\sin \phi$

Effectuons un développement limité de $\sin \phi$

$$\sin \phi \sim -2\epsilon \frac{f - \frac{e}{d}}{\mu} \frac{1}{1+\epsilon} T_1^2 \left[1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi) \epsilon \right]^2 \times \left(-\frac{1+\epsilon}{N\pi\epsilon} \right)$$

$$\text{soit : } \sin \phi \sim 2 \lambda T_1^2 \left[1 + 2 \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi) \epsilon \right] \quad |1.8.2.3.1|$$

$$\sin \phi \text{ a pour limite : } \sin \phi_1 = 2 \lambda T_1^2 > 0 \quad |1.8.2.3.2|$$

1.8.2.4 - Calcul de T_1

Eliminons ϕ_1 entre les équations |1.8.2.2.2| et

|1.8.2.3.2| ; il vient :

$$4 \lambda^2 T_1^4 + 4 \lambda^2 T_1^2 - 1 = 0$$

Ce trinôme bicarré possède deux racines de signes contraires ; seule la racine positive convient :

$$T_1^2 = \frac{-2\lambda^2 + \sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2}}{4\lambda^2}$$

L'inégalité [1.7.16] impose la racine unique :

$$\boxed{\operatorname{tg} \psi_1 = T_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} \right]}} \quad [1.8.2.4.1]$$

1.8.2.5 - Limite de ψ

L'inégalité (1.7.17) devient, après développement au premier ordre :

$$\varepsilon \cos \psi > 0$$

Les angles (mod. 2π) $\psi_1^+ = \lim_{r \rightarrow 1^+} \psi$ et $\psi_1^- = \lim_{r \rightarrow 1^-} \psi$

sont repérés sur un cercle trigonométrique (figure 1.7)

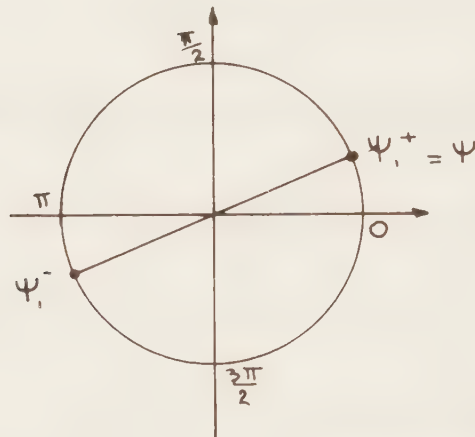


Fig. 1.7

Pour $r = 1$, le déphasage ψ n'est connu qu'à π près (remarquons que dans les différentes équations, ψ n'intervient que par sa tangente).

En réalité, l'amplitude A change de signe quand r varie de 1^- à 1^+ . Comme nous avons imposé la condition $A > 0$, le déphasage ψ varie de π quand r varie de 1^- à 1^+ afin de ne pas modifier le signe de $A \cos(\omega_0 t + \psi)$.

Nous prendrons désormais dans toute la suite du paragraphe 1.8.2 :

$$\psi_1 = \psi_1^+ = \lim_{r \rightarrow 1^+} \psi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad [1.8.2.5.1]$$

Afin de tenir compte des deux limites pour ψ , nous pouvons écrire, au voisinage de $r = 1$:

$$\cos \psi \sim \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \cos (\psi_1 + \alpha\varepsilon)$$

$$\text{et } \sin \psi \sim \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \sin (\psi_1 + \alpha\varepsilon)$$

1.8.2.6 - Limite de Φ

$\text{tg } \Phi_1$ est calculé à partir de |1.8.2.2.2| et |1.8.2.3.2|

$$\text{tg } \Phi_1 = T_1$$

avec $\sin \Phi_1 > 0$ et $\cos \Phi_1 > 0$

$$\text{soit : } \boxed{\Phi_1 = \psi_1} \quad (\text{mod. } 2\pi) \quad |1.8.2.6.1|$$

Au voisinage de $r = 1$, nous pouvons poser :

$$\Phi = \Phi_1 + \beta\varepsilon \quad |1.8.2.6.2|$$

1.8.2.7 - Calcul de α et β

Effectuons un développement limité de $\cos \Phi$ et de $\sin \Phi$:

$$\cos \Phi \sim \cos \Phi_1 - \beta\varepsilon \sin \Phi_1$$

$$\text{et } \sin \Phi \sim \sin \Phi_1 + \beta\varepsilon \cos \Phi_1$$

En identifiant ces deux équations avec |1.8.2.2.1| et |1.8.2.3.1|, nous obtenons :

$$\cos \Phi_1 - \beta\varepsilon \sin \Phi_1 \sim 2\lambda T_1 \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{N\pi}{T_1} + \frac{1+T_1^2}{T_1} \alpha \right) \right]$$

$$\text{et } \sin \Phi_1 + \beta\varepsilon \cos \Phi_1 \sim 2\lambda T_1^2 \left[1 + 2 \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi)\varepsilon \right]$$

Après simplifications, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{1+T_1^2}{T_1} \alpha + T_1 \beta = -1 + \frac{N\pi}{T_1} \\ 2(1+T_1^2)\alpha - \beta = 2N\pi (1+T_1^2) \end{cases} \quad |1.8.2.7.1|$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-T_1 + N\pi [1 + 2 T_1^2 (1+T_1^2)]}{(1+T_1^2) (1+2T_1^2)} \\ \beta = \frac{-2T_1 (1+N\pi T_1)}{1+2T_1^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} |1.8.2.7.2| \\ |1.8.2.7.3| \end{matrix}$$

1.8.2.8 - Développement limité de A

$$A \sim - \frac{fd-e}{\mu} \frac{T_1 \left[1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha-N\pi) \varepsilon \right]}{\sin(-N\pi\varepsilon) \times \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \cos [-N\pi\varepsilon + \psi_1 + \alpha\varepsilon]}$$

$$A \sim \frac{\lambda d T_1}{|\varepsilon|} \frac{1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha-N\pi) \varepsilon}{\cos \psi_1 - (\alpha-N\pi) \varepsilon \sin \psi_1}$$

Nous obtenons finalement :

$$A \sim \frac{d}{2|\varepsilon|} \left[1 + \frac{1+T_1^2}{T_1} (\alpha-N\pi) \varepsilon \right] \quad |1.8.2.8.1|$$

1.8.2.9 - Equation du mouvement pour r = 1 entre deux percussions consécutives

Pour r différent de 1, l'équation du mouvement est la suivante :

$$|1.2.1| : x_1 - x_2 = A \cos (\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos (\omega t + \Phi)$$

Effectuons un développement limité de $\cos(\omega_0 t + \psi)$ et de $\cos (\omega t + \Phi)$, au voisinage de $r = 1$:

$$\begin{aligned} \cos (\omega_0 t + \psi) &\sim \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} \cos (\omega_0 t + \psi_1 + \alpha\varepsilon) \\ &\sim \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} [\cos (\omega_0 t + \psi_1) - \alpha\varepsilon \sin(\omega_0 t + \psi_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \cos (\omega t + \Phi) &\sim \cos [\omega_0 t + \psi_1 + (\omega_0 t + \beta) \varepsilon] \\ &\sim \cos (\omega_0 t + \psi_1) - (\omega_0 t + \beta) \varepsilon \sin (\omega_0 t + \psi_1) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'équation limite pour |1.2.1|

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\sim \frac{d}{2|\varepsilon|} \left[1 + \frac{1+2T_1^2}{T_1} (\alpha-N\pi) \varepsilon \right] \times \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon} [\cos (\omega_0 t + \psi_1) - \alpha\varepsilon \sin(\omega_0 t + \psi_1)] \\ &\quad - d \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2}}{2\varepsilon} [\cos(\omega_0 t + \psi_1) - (\omega_0 t + \beta) \varepsilon \sin (\omega_0 t + \psi_1)] \end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{d}{2} (\omega_0 t + \beta - \alpha) \sin (\omega_0 t + \psi_1) + \frac{d}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1+2T_1^2}{T_1} (\alpha - N\pi) \right] \cos (\omega_0 t + \psi_1) + O(\varepsilon)$$

Pour $r = 1$, l'équation du mouvement est la suivante :

$$x_1 - x_2 = \frac{d}{2} (\omega_0 t - \gamma_1) \sin (\omega_0 t + \psi_1) + \frac{d}{2} \gamma_2 \cos (\omega_0 t + \psi_1)$$

| 1.8.2.9.1 |

avec :

$$\gamma_1 = \frac{T_1(1+2T_1^2) + N\pi [1+4 T_1^2(1+T_1^2)]}{(1+T_1^2) (1+2T_1^2)} > 0 \quad | 1.8.2.9.2 |$$

et :

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1+N\pi T_1}{1+T_1^2} \quad | 1.8.2.9.3 |$$

Dressons un tableau des variations de γ_2 :

T_1	0	$\frac{1}{N\pi} [-1 + \sqrt{1+N^2\pi^2}]$	$N\pi + \sqrt{1+N^2\pi^2}$	$+\infty$
γ_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \sqrt{1+N^2\pi^2}$	0	$\frac{1}{2}$

Entre les instants τ^- et τ^+ , nous pouvons calculer les variations :

$$\Delta(x_1 - x_2) = -\frac{d}{2} \cdot \omega_0 N T_1 \sin \psi_1 = -2 d N \pi \lambda T_1^2 < 0$$

et

$$\Delta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -\frac{d}{2} \omega_0 \times 2 N \pi \cos \psi_1 = -2 d \omega_0 N \pi \lambda T_1 < 0$$

(quantités respectivement égales à $(-\Delta x_2)$ et ΔV_1)

Nous pouvons étudier l'évolution, en fonction du temps, de $(x_1 - x_2)$ et de $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ par une construction de Fresnel (figure 1.8).

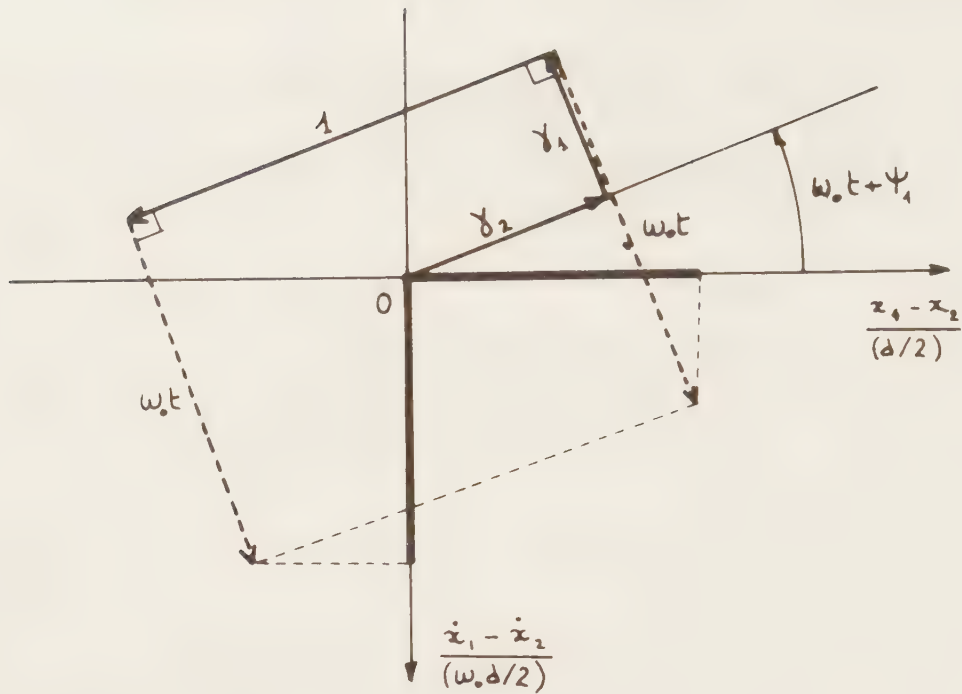


Fig. 1.8

La présence du terme $\frac{d}{2} (\omega_0 t - \gamma_1)$ dans l'équation [1.8.2.9.1] nous montre l'existence de battements pour le mouvement de la masse m_1 , entre deux percussions consécutives. L'amplitude commence par décroître. Elle atteint un minimum de valeur $\frac{1}{2} d \gamma_2$ au temps $t = \frac{\gamma_1}{\omega_0}$. Puis elle croît jusqu'à atteindre la valeur e , où il y a à nouveau percussion.

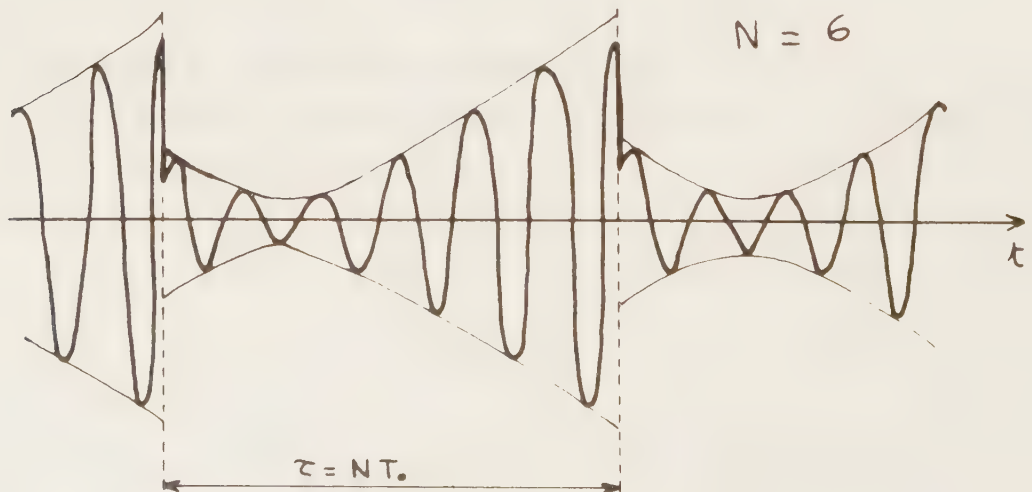


Fig. 1.9

1.8.3 - Etude des mouvements possibles du pieu

Appelons e' la hauteur à laquelle remonte le percuteur. Nous avons $e' > e$

1.8.3.1 - $F > ke'$ (figure 1.10)

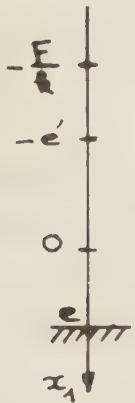


Fig. 1.10

Rappelons que la force F est égale à la force de frottement existant entre le pieu et le sol, diminuée du poids de l'ensemble.

Au paragraphe 1.1.3, nous avons fait l'hypothèse suivante : la force F est toujours supérieure à toute force exercée par le ressort. Nous avons en particulier $\frac{F}{k} > e$, ou, en divisant par E et en passant aux coefficients sans dimension $f - \frac{e}{d} > 0$.

Tous les calculs ont été faits avec cette hypothèse.

1.8.3.2 - $ke < F < ke'$ (figure 1.11)



Fig. 1.11

Après la percussion, le pieu s'enfonce de Δx_2 , positif. Si avant que x_1 n'atteigne la valeur $(-e')$, la force développée dans le ressort devient supérieure à la force de frottement augmentée du poids de l'ensemble, le pieu peut remonter d'une quantité $\Delta x_2'$.

Il y aura véritablement enfoncement si :

$$\Delta x_2 - \Delta x_2' > 0$$

Dans ce cas, le rendement sera inférieur à celui obtenu au paragraphe 1.8.3.1.

Nous avons donc intérêt à effectuer un réglage tel que e' soit inférieur à $\frac{F}{k}$.

1.8.3.3 - $0 < F < ke$ (figure 1.12)

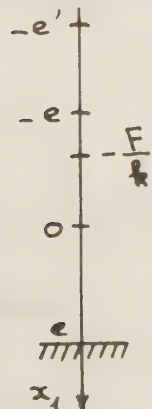


Fig. 1.12

L'étude que nous avons faite ne s'applique plus. Nous pouvons alors avoir un déplacement moyen du pieu vers le haut : il y a arrachement du pieu (la force F est égale à la force de frottement augmentée du poids de l'ensemble quand le pieu remonte).

Un arrachage à rendement plus élevé est obtenu en utilisant une contrebutée.

1.9 - DETERMINATION DU MAXIMUM DE V_{moy}

Pour e, d, f, μ, R et N fixés, les extrêmes de la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu seront obtenus pour les valeurs de r annulant la dérivée, par rapport à r , de V_{moy} .

Nous avons :

$$V_{\text{moy}} = \frac{fd-e}{\mu} \frac{\omega_o}{N\pi} r T^2$$

$$\text{et} \quad \frac{dV_{\text{moy}}}{dr} = \frac{fd-e}{\mu} \frac{\omega_o}{N\pi} T \left(T + 2r \frac{dT}{dr} \right) \quad |1.9.1|$$

Nous allons calculer $\frac{dT}{dr}$ à partir de la dérivée, par rapport à r , de la relation |1.7.10| et en remplaçant $\frac{dc}{dr}$ par sa valeur déduite de la relation |1.7.6|.

$$\frac{dc}{dr} = \frac{N\pi}{r^2} (1+c^2)$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dB(T)}{dT} = \frac{dT}{dr} & \left[2\left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) T^3 - 3c \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) T^2 + \left(c^2 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} T + \frac{\mu c}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1}\right) \right] \\ & + \left[\frac{N\pi}{r} (1+c^2) - c \right] \frac{cT^4}{r^3} + \left[\frac{2ac}{r} - N\pi(1+c^2) \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) \right] \frac{T^3}{r^2} \\ & + \left[N\pi c(1+c^2) - \frac{a^2}{r} \right] \frac{T^2}{r^2} + \frac{\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} \frac{N\pi}{r^2} (1+c^2) T - 2 \left(\frac{\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} \right)^2 \frac{r}{(1-r^2)^3} \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\text{relation de la forme : } c(T) \frac{dT}{dr} + D(T) = 0 \quad |1.9.2|$$

avec :

$$\begin{aligned} c(T) &= 2\left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) T^3 - 3c \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) T^2 + \left[c^2 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} T + \frac{\mu c}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} \right] \\ \text{et } D(T) &= \left[\frac{N\pi}{r} (1+c^2) - c \right] \frac{cT^4}{r^3} + \left[\frac{2ac}{r} - N\pi(1+c^2) \left(1 + \frac{a}{r^2}\right) \right] \frac{T^3}{r^2} \\ &+ \left[N\pi c(1+c^2) - \frac{a^2}{r} \right] \frac{T^2}{r^2} + \frac{\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} \frac{N\pi}{r^2} (1+c^2) T - 2 \left(\frac{\mu}{f\left(\frac{d}{e}\right)-1} \right)^2 \frac{r}{(1-r^2)^3} \end{aligned}$$

Les courbes d'équation $B(T) = 0$, $C(T) = 0$, $D(T) = 0$ n'ont certainement pas de point commun.

- Si $D(T) = 0$ et $C(T) \neq 0$: nous avons alors $\frac{dT}{dr} = 0$ et par suite $\frac{dV_{\text{moy}}}{dr} = 0$ pour $T = 0$.

Dans ce cas, nous avons $\dot{x}_1^- = 0$ et $V_{\text{moy}} = 0$

Le percuteur arrive sur le pieu à une vitesse nulle et il n'y a pas choc. Cela correspond au minimum de la fonction $V_{\text{moy}}(r)$, minimum qui est nul.

- Si $C(T) = 0$ et $D(T) \neq 0$: $\frac{dT}{dr}$ est infini ; de même pour $\frac{dV_{\text{moy}}}{dr}$. La courbe $V_{\text{moy}}(r)$ possède une tangente de pente infinie.

- Si $C(T) \cdot D(T) \neq 0$: nous avons $\frac{dT}{dr} = - \frac{D(T)}{C(T)}$

Les maximums de la fonction $V_{\text{moy}}(r)$ vérifient l'équation (la valeur $T = 0$ étant rejetée) :

$$T + 2r \frac{dT}{dr} = 0$$

et sont donc à l'intersection des courbes d'équation :

$$\begin{cases} B(T) = 0 \\ TC(T) - 2r D(T) = 0 \end{cases}$$

Chapitre 2

ETUDE DE LA STABILITE

2.1 - PRINCIPE

La méthode consiste à perturber la solution trouvée pour le système vibropercuteur à percussions "régulières". Cette perturbation a lieu immédiatement après une percussion et nous déterminons l'écart entre la solution résultante et la solution périodique immédiatement après la percussion suivante. En répétant ce processus à chaque nouvelle percussion, nous pouvons donc déterminer la propagation des perturbations initiales dans la solution.

Il y a stabilité (resp. instabilité) si les écarts entre la solution perturbée et la solution périodique décroissent (resp. croissent) quand le nombre de percussions augmente indéfiniment.

2.2 - ETUDE THEORIQUE

2.2.1 - Conséquences de la perturbation sur le 1er intervalle de percussion

A l'instant $t = 0^+$, juste après une percussion, produisons une légère perturbation dans le mouvement périodique, de telle façon que les déplacements et les vitesses diffèrent des valeurs calculées.

Dans l'équation [1.2.1], la perturbation initiale se traduit par une petite variation des quantités A , ψ , ϕ . Notons respectivement $A\alpha_0$, θ_0 , δ_0 ces variations. α_0 , θ_0 , δ_0 sont des coefficients sans dimension, supposés petits.

L'équation du mouvement devient :

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^{(1)} = A(1 + \alpha_0) \cos(\omega_0 t + \psi + \theta_0) + \frac{d}{1-r} \cos(\omega t + \phi + \delta_0) \\ (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(1)} = -A \omega_0 (1 + \alpha_0) \sin(\omega_0 t + \psi + \theta_0) - \frac{d\omega}{1-r} \sin(\omega t + \phi + \delta_0) \end{cases}$$

L'indice (1) indique que l'équation correspondante est écrite dans le premier intervalle de percussions.

Le mouvement perturbé n'est plus périodique ; la prochaine percussion a lieu au bout du temps $\tau_1 = \tau + \frac{1}{\omega}$.

Notons que les perturbations α_i , θ_i , δ_i seront toujours supposées infiniment petites, sinon le système serait manifestement instable ; cela nous permet de négliger les termes du second ordre.

Pour $t = \tau_1^-$, calculons les déplacements et vitesses

relatifs :

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^{(1)}(\tau_1^-) &= A(1 + \alpha_0) \cos(\omega_0 \tau + \frac{\delta_1}{r} + \psi + \theta_0) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\phi + \delta_0 + \delta_1) \\ &= A(1 + \alpha_0) \left[\cos(\omega_0 \tau + \psi) - \left(\frac{\delta_1}{r} + \theta_0\right) \sin(\omega_0 \tau + \psi) \right] + \frac{d}{1-r^2} \left[\cos \phi - (\delta_0 + \delta_1) \sin \phi \right] \\ &= A \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \cos \phi - A \left(\frac{\delta_1}{r} + \theta_0\right) \sin(\omega_0 \tau + \psi) + A \alpha_0 \cos(\omega_0 \tau + \psi) \\ &\quad - \frac{d}{1-r^2} (\delta_0 + \delta_1) \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^{(1)}(\tau_1^-) &= (x_1 - x_2)(\tau^-) + A[\alpha_0 \cos(\omega_0 \tau + \psi) - \theta_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi)] \\ &\quad - \frac{d}{1-r^2} \delta_0 \sin \phi - \left[\frac{A}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \sin \phi \right] \delta_1 \end{aligned}$$

De même, nous trouvons :

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(1)}(\tau_1^-) &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^-) - A\omega_0 [\alpha_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \theta_0 \cos(\omega_0 \tau + \psi)] \\ &\quad - \frac{d\omega}{1-r^2} \delta_0 \cos \phi - \left[\frac{A\omega}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d\omega}{1-r^2} \cos \phi \right] \delta_1 \end{aligned}$$

Les écarts sur les déplacements et les vitesses relatifs à la fin du premier intervalle de percussions, entre le mouvement perturbé et le mouvement périodique, sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta x_f^{(1)} &= (x_1 - x_2)^{(1)}(\tau_1^-) - (x_1 - x_2)(\tau^-) \\ \Delta \dot{x}_f^{(1)} &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(1)}(\tau_1^-) - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^-) \end{aligned}$$

L'indice "f" correspond à la fin des intervalles de percussions. Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \Delta x_f^{(1)} &= A[\alpha_0 \cos(\omega_0 \tau + \psi) - \theta_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi)] - \frac{d}{1-r^2} \delta_0 \sin \phi - \left[\frac{A}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \sin \phi \right] \delta_1 \\ \text{et :} \\ \Delta \dot{x}_f^{(1)} &= -A\omega_0 [\alpha_0 \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \theta_0 \cos(\omega_0 \tau + \psi)] - \frac{d\omega}{1-r^2} \delta_0 \cos \phi - \left[\frac{A\omega}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d\omega}{1-r^2} \cos \phi \right] \delta_1 \end{aligned}$$

Immédiatement après la première percussion (au temps $t = \tau_1^+$) les quantités A , ψ , ϕ , ont subi respectivement les variations $A\alpha_1$, θ_1 , $(\delta_0 + \delta_1)$.

2.2.2 - Sur le 2ème intervalle de percussion

L'équation du mouvement devient dans le 2ème intervalle de percussion repéré par l'indice (2), en changeant l'origine des temps :

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^{(2)} = A(1 + \alpha_1) \cos(\omega_0 t + \psi + \theta_1) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega t + \phi + \delta_0 + \delta_1) \\ (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(2)} = -A \omega_0 (1 + \alpha_1) \sin(\omega_0 t + \psi + \theta_1) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin(\omega t + \phi + \delta_0 + \delta_1) \end{cases}$$

Pour $t = \tau_1^+$, calculons les déplacements et vitesses relatifs :

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^{(2)}(\tau_1^+) &= A(1 + \alpha_1) \cos(\psi + \theta_1) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\phi + \delta_0 + \delta_1) \\ &= (x_1 - x_2)(\tau^+) + A[\alpha_1 \cos \psi - \theta_1 \sin \psi] - \frac{d}{1-r^2} (\delta_0 + \delta_1) \sin \phi \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(2)}(\tau_1^+) &= -A \omega_0 (1 + \alpha_1) \sin(\psi + \theta_1) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin(\phi + \delta_0 + \delta_1) \\ &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^+) - A \omega_0 [\alpha_1 \cos \psi + \theta_1 \sin \psi] - \frac{d\omega}{1-r^2} (\delta_0 + \delta_1) \cos \phi \end{aligned}$$

Les écarts sur les déplacements et les vitesses relatifs au début du second intervalle de percussion, entre le mouvement perturbé et le mouvement périodique, sont définis par :

$$\Delta x_d^{(2)} = (x_1 - x_2)^{(2)}(\tau_1^+) - (x_1 - x_2)(\tau^+)$$

$$\text{et } \Delta \dot{x}_d^{(2)} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(2)}(\tau_1^+) - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^+)$$

L'indice "d" correspond au début des intervalles de percussions.

Nous obtenons finalement :

$$\Delta x_d^{(2)} = A[\alpha_1 \cos \psi - \theta_1 \sin \psi] - \frac{d}{1-r^2} (\delta_0 + \delta_1) \sin \phi$$

$$\text{et } \Delta \dot{x}_d^{(2)} = -A \omega_0 [\alpha_1 \sin \psi + \theta_1 \cos \psi] - \frac{d\omega}{1-r^2} (\delta_0 + \delta_1) \cos \phi$$

Immédiatement avant le choc, le percuteur et le pieu sont en contact, ce qui s'exprime par la relation :

$$(x_1 - x_2)(\tau^-) = (x_1 - x_2)^{(1)}(\tau_1^-) = e$$

ou encore :

$$\Delta x_f^{(1)} = 0 \quad | \quad 2.2.2.1 |$$

Immédiatement après une percussion, le percuteur et le pieu sont à une distance égale à l'interstice e diminué de l'enfoncement du pieu Δx_2 :

$$(x_1 - x_2)(\tau^+) = (x_1 - x_2)^{(2)}(\tau_1^+) = e - \Delta x_2$$

ce qui donne :

$$\Delta x_d^{(2)} = 0 \quad |2.2.2.2|$$

Par ailleurs, le coefficient de restitution R est constant et défini par :

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^+) = -R(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\tau^-)$$

$$\text{ou par : } (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(2)}(\tau_1^+) = -R(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(1)}(\tau_1^-)$$

En soustrayant membre à membre ces 2 équations, nous obtenons :

$$\Delta \dot{x}_d^{(2)} = -R \cdot \Delta \dot{x}_f^{(1)} \quad |2.2.2.3|$$

Le système des 3 équations linéaires |2.2.2.1|, |2.2.2.2| et |2.2.2.3| à 3 inconnues α_1 , θ_1 , δ_1 permet de déterminer α_1 , θ_1 , δ_1 en fonction des perturbations initiales α_0 , θ_0 , δ_0 .

Nous pouvons recommencer le calcul au temps $\tau_2 = 2\tau + \frac{\delta_2}{\omega}$ pour obtenir $\Delta x_f^{(2)}$ et $\Delta \dot{x}_f^{(2)}$, et écrire les équations du système perturbé dans le troisième intervalle pour trouver $\Delta x_d^{(3)}$ et $\Delta \dot{x}_d^{(3)}$.

Cela nous permet de calculer α_2 , θ_2 , δ_2 en fonction de α_0 , θ_0 , δ_0 .

Nous pouvons ainsi étudier une série d'intervalles pour le système perturbé, et calculer les écarts α_i , θ_i et δ_i par itération. Cependant, ce calcul est long. Aussi, allons-nous utiliser la méthode des différences finies.

2.2.3 - Propagation de la perturbation initiale

Ecrivons les équations du système perturbé pour le $p^{\text{ième}}$ intervalle. Le temps est compté à partir de l'instant du choc ($t = 0^+$), et les effets de la perturbation initiale sont caractérisés par les écarts α_{p-1} , θ_{p-1} et $\Delta_{p-1} = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{p-1}$. Nous supposons toujours que ces quantités sont petites.

Les équations sont :

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^{(P)} = A(1 + \alpha_{p-1}) \cos(\omega_0 t + \psi + \theta_{p-1}) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega t + \phi + \Delta_{p-1}) \\ (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(P)} = -A\omega_0(1 + \alpha_{p-1}) \sin(\omega_0 t + \psi + \theta_{p-1}) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin(\omega t + \phi + \Delta_{p-1}) \end{cases}$$

Au temps $\tau_p^- = p\tau^- + \frac{\delta_p}{\omega}$, nous trouvons les écarts :

$$\Delta x_f^{(P)} = A[\alpha_{p-1} \cos(\omega_0 \tau + \psi) - \theta_{p-1} \sin(\omega_0 \tau + \psi)] - \frac{d}{1-r^2} \Delta_{p-1} \sin \Phi - \left[\frac{A}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \sin \Phi \right] \delta_p \quad |2.2.3.1|$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_f^{(P)} = & -A\omega_0 [\alpha_{p-1} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \theta_{p-1} \cos(\omega_0 \tau + \psi)] - \frac{d\omega}{1-r^2} \Delta_{p-1} \cos \Phi \\ & - \left[\frac{A\omega_0}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d\omega}{1-r^2} \cos \Phi \right] \delta_p \end{aligned} \quad |2.2.3.2|$$

Mais $\delta_p = \Delta_p - \Delta_{p-1}$; les équations |2.2.3.1| et |2.2.3.2| deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta x_f^{(P)} = & A[\alpha_{p-1} \cos(\omega_0 \tau + \psi) - \theta_{p-1} \sin(\omega_0 \tau + \psi)] + \frac{A}{r} \Delta_{p-1} \sin(\omega_0 \tau + \psi) \\ & - \left[\frac{A}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d}{1-r^2} \sin \Phi \right] \Delta_p \end{aligned} \quad |2.2.3.3|$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_f^{(P)} = & -A\omega_0 [\alpha_{p-1} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \theta_{p-1} \cos(\omega_0 \tau + \psi)] + \frac{A\omega_0}{r} \Delta_{p-1} \cos(\omega_0 \tau + \psi) \\ & - \left[\frac{A\omega_0}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{d\omega}{1-r^2} \cos \Phi \right] \Delta_p \end{aligned} \quad |2.2.3.4|$$

Sur le $(p+1)^{\text{ème}}$ intervalle, les équations du système perturbé sont :

$$(x_1 - x_2)^{(p+1)} = A(1 + \alpha_p) \cos(\omega_0 t + \psi + \theta_p) + \frac{d}{1-r^2} \cos(\omega t + \Phi + \Delta_p)$$

et

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{(p+1)} = -A\omega_0(1 + \alpha_p) \sin(\omega_0 t + \psi + \theta_p) - \frac{d\omega}{1-r^2} \sin(\omega t + \Phi + \Delta_p)$$

Au temps $t = 0^+$, nous obtenons les écarts :

$$\Delta x_d^{(p+1)} = A[\alpha_p \cos \psi - \theta_p \sin \psi] - \frac{d}{1-r^2} \Delta_p \sin \Phi \quad |2.2.3.5|$$

et :

$$\Delta \dot{x}_d^{(p+1)} = -A\omega_0 [\alpha_p \sin \psi + \theta_p \cos \psi] - \frac{d\omega}{1-r^2} \Delta_p \cos \Phi \quad |2.2.3.6|$$

Ces différents écarts ne sont pas quelconques : ils vérifient des conditions semblables à |2.2.2.1|, |2.2.2.2| et |2.2.2.3|.

$$\begin{cases} \Delta x_f^{(p)} = 0 \\ \Delta x_d^{(p+1)} = 0 \\ \Delta \dot{x}_d^{(p+1)} + R \Delta \dot{x}_f^{(p)} = 0 \end{cases} \quad |2.2.3.7|$$

Ce système de 3 équations peut s'écrire sous la forme d'une égalité matricielle, après avoir posé $\gamma = \frac{d}{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{\gamma}{1-r^2} \sin \phi \\ \cos \psi & -\sin \psi & -\frac{\gamma}{1-r^2} \sin \phi \\ \sin \psi & \cos \psi & \frac{R}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{\gamma r}{1-r^2} (1+R) \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p \\ \theta_p \\ \Delta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \tau + \psi) & -\sin(\omega_0 \tau + \psi) & \frac{1}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -R \sin(\omega_0 \tau + \psi) & -R \cos(\omega_0 \tau + \psi) & \frac{R}{r} \cos(\omega_0 \tau + \psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{p-1} \\ \theta_{p-1} \\ \Delta_{p-1} \end{bmatrix}$$

|2.2.3.8|

2.2.4 - Résolution

L'égalité matricielle |2.2.3.8| peut se mettre sous la forme :

$$UX_p = V X_{p-1} \quad |2.2.4.1|$$

en posant :

$$X_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \theta_i \\ \Delta_i \end{bmatrix} \quad i \in N \quad |2.2.4.2|$$

Calculons le déterminant de la matrice U :

$$\begin{aligned} \det. U &= \frac{1}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{\gamma}{1-r^2} \sin \phi \\ &= -\frac{\dot{X}_1}{A\omega} \end{aligned}$$

Le cas $\dot{X}_1 = 0$ ne nous intéressant pas, la matrice U est régulière. Son inverse U^{-1} existe donc.

La matrice V est singulière.

Multiplions à gauche les deux membres de l'équation |2.2.4.1| par U^{-1} ; nous obtenons :

$$X_p = KX_{p-1} \quad |2.2.4.3|$$

$$\text{avec :} \quad K = U^{-1}V \quad |2.2.4.4|$$

La matrice K est singulière car son déterminant est nul : $\det. K = \det.(U^{-1}) \times \det.V = 0$. Ses termes sont indépendants de p.

Par itération, nous obtenons :

$$X_p = K^p X_0 \quad |2.2.4.5|$$

avec
$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \theta_0 \\ \Delta_0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ correspond au mouvement permanent étudié au chapitre 1.

Appelons λ_i ($i = 1, 2, 3$) les valeurs propres de la matrice K . Nous supposons qu'elles sont distinctes. Elles sont solutions de l'équation :

$$\det. (K - \lambda I) = 0 \quad |2.2.4.6|$$

La matrice K étant singulière, une des valeurs propres est nulle.

Posons :

$$\lambda_3 = 0$$

Appelons Z_1, Z_2, Z_3 , 3 vecteurs propres correspondant respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 . Ils forment les vecteurs-colonnes d'une matrice de passage Z .

Effectuons le changement de variable :

$$X_p = Z Y_p \quad p \in \mathbb{N} \quad |2.2.4.7|$$

L'équation |2.2.4.3| devient alors :

$$Z Y_p = K Z Y_{p-1}$$

ou encore : $Y_p = \Lambda Y_{p-1} \quad |2.2.4.8|$

avec : $\Lambda = Z^{-1} K Z$

La matrice Λ est diagonale :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par itération, nous avons : $Y_p = \Lambda^p Y_0$ avec $Y_0 = Z^{-1} X_0$

et :
$$\Lambda^p = \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système est asymptotiquement stable si, et seulement si, les coefficients de Λ^p tendent vers 0 quand p tend vers l'infini. En effet, les termes de Y_p tendent alors vers 0, de même ceux de X_p , lorsque p tend vers l'infini.

Pour que le système soit asymptotiquement stable, il est donc nécessaire et suffisant que les valeurs propres λ_1 et λ_2 soient de module strictement inférieur à 1 :

$$\Lambda^p \rightarrow [0] \iff |\lambda_i| < 1, i = \{1, 2\} \quad |2.2.4.9|$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation |2.2.4.6| :

$$\det.(K - \lambda I) = 0$$

$$\text{soit encore : } \det.[U^{-1}(V - \lambda U)] = 0$$

$$\text{mais : } \det.[U^{-1}] \neq 0$$

$$\text{L'équation |2.2.4.6| se réduit à : } \det.(V - \lambda U) = 0 \quad |2.2.4.10|$$

Ce déterminant se met sous la forme :

$$\lambda(b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2) = 0$$

Les deux racines λ_1 et λ_2 (distinctes) de l'équation $f(\lambda) = b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0$ vérifient les conditions |2.2.4.9| si, et seulement si les coefficients b_i ($i = 1, 2, 3$) vérifient les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^2 - 4 b_0 b_2 > 0 \\ b_0 f(1) = b_0 (b_0 + b_1 + b_2) > 0 \\ b_0 f(-1) = b_0 (b_0 - b_1 + b_2) > 0 \\ -2 < \frac{b_1}{b_0} < +2 \end{array} \right.$$

Ces inégalités sont équivalentes à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{b_2}{b_0} \right| < 1 \\ \left| \frac{b_1}{b_0 + b_2} \right| < 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |2.2.4.11| \\ |2.2.4.12| \end{array}$$

2.2.5 - Remarques

+ Les quantités α_p , θ_p , Δ_p sont toujours dépendantes (tout au moins pour $p \geq 1$). La matrice V est en effet singulière (deuxième ligne nulle, ou deuxième colonne proportionnelle à la troisième).

+ Déterminons un vecteur propre Z_3 correspondant à la valeur propre $\lambda_3 = 0$. Il est défini par :

$$[K - \lambda_3 I] Z_3 = KZ_3 = 0$$

$$\text{soit : } U^{-1} V Z_3 = 0$$

ou encore : $V Z_3 = 0$, en multipliant à gauche par U . Nous constatons immédiatement (troisième colonne de V proportionnelle à la deuxième colonne, coefficient $-\frac{1}{r}$) que nous pouvons prendre :

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{bmatrix}$$

Si initialement X_0 est proportionnel à Z_3 (la relation entre les variations de ψ et ϕ est indépendante de la variation de A), nous avons alors :

$$X_1 = [0], \dots, X_p = [0], \dots$$

(Dès le premier choc, le mouvement perturbé redevient "régulier").

2.3 - APPLICATION AU SYSTEME ETUDIE

Le trinôme du second degré $b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0$ a pour coefficients :

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{\gamma}{1-r} \sin \phi = - \frac{\dot{X}_1^-}{A\omega} \\ b_1 = - \frac{1}{r} \sin(\omega_0 \tau + \psi) + \frac{R}{r} \sin \psi - \frac{\gamma}{1-r} (1-R) \sin \phi \cos \omega_0 \tau - \frac{\gamma r}{1-r} (1+R) \cos \phi \sin \omega_0 \tau \\ b_2 = - R \left[\frac{1}{r} \sin \psi + \frac{\gamma}{1-r} \sin \phi \right] = R \frac{\dot{X}_1^+}{A\omega} \end{cases} \quad |2.3.1|$$

Nous avons :

$$\left| \frac{b_2}{b_0} \right| = R \left| \frac{\dot{X}_1^+}{\dot{X}_1^-} \right| < R \leq 1$$

L'inégalité |2.2.4.10| est donc toujours vérifiée.

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} b_0 + b_2 &= \frac{1}{A\omega} [R \dot{X}_1^+ - \dot{X}_1^-] \\ &= - \frac{\dot{X}_1^-}{A\omega} \cdot \frac{1+R^2 + \mu(1-R)}{1+\mu} \end{aligned} \quad |2.3.2|$$

La quantité $(b_0 + b_2)$ est toujours négative.

Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$b_1 = - (b_0 + b_2) + u$$

$$\text{avec } u = \frac{\gamma}{1-r^2} [(1-R) (1-\cos \omega_0 \tau) \sin \Phi - r(1+R) \sin \omega_0 \tau \cos \Phi] \quad |2.3.3|$$

L'inégalité |2.2.4.11| peut alors s'écrire :

$$-1 < \frac{b_1}{b_0 + b_2} = -1 + \frac{u}{b_0 + b_2} < +1$$

ou encore, puisque $(b_0 + b_2)$ est négatif :

$$\boxed{2(b_0 + b_2) < u < 0} \quad |2.3.4|$$

Chapitre 3

MOUVEMENT TRANSITOIRE

Nous nous proposons de préciser l'ordre de grandeur des erreurs commises à partir des hypothèses faites sur la durée de glissement du pieu, soit Δt , et sur le déplacement correspondant du percuteur $\Delta x_1 = x_1(\Delta t)$.

3.1 - MISE EN EQUATION

Le glissement du pieu a lieu tant que $\dot{x}_2$ n'est pas nul, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps $(0, \Delta t)$. Δt sera supposé petit, comparé à la période des percussions $\tau = \frac{2N\pi}{\omega}$, en particulier pour $N = 1$:

$$\Delta t \ll \frac{2\pi}{\omega} \quad |3.1.1|$$

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -F + E \cos \omega(t+\theta) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = -F \end{cases} \quad |3.1.2|$$

La percussion a lieu à l'instant $t = 0$; θ est constant.

3.2 - RESOLUTION

3.2.i - Solution générale des équations sans second membre

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad |3.2.1.1|$$

Il existe une solution linéaire du temps :

$$x_1 = x_2 = \alpha t + \beta \quad |3.2.1.2|$$

α et β étant deux constantes quelconques. Il y a une translation d'ensemble. La fréquence propre correspondante est :

$$\boxed{\Omega_1 = 0} \quad |3.2.1.3|$$

Cherchons une solution harmonique de pulsation Ω_2 non nulle.

Les équations |3.2.1.1| deviennent alors :

$$\begin{cases} -m_1 \Omega_2^2 x_1 - m_2 \Omega_2^2 x_2 = 0 \\ -m_2 \Omega_2^2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ x_2 [-m_2 \Omega_2^2 + k (1 + \frac{m_2}{m_1})] = 0 \end{cases}$$

x_2 n'est pas identiquement nul. Nous en déduisons :

$$\boxed{\Omega_2^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \omega_o^2 (1 + \mu)} \quad |3.2.1.4|$$

Les déplacements sont alors de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = A_o m_2 \cos (\Omega_2 t + \psi_o) \\ x_2 = - A_o m_1 \cos (\Omega_2 t + \psi_o) \end{cases} \quad |3.2.1.5|$$

A_o et ψ_o étant deux constantes quelconques.

3.2.2 - Solution particulière des équations complètes

Nous cherchons une solution de la forme :

$$x_i = a_i t^2 + b_i t + c_i + A_i \cos [\omega(t+\theta) + \psi_i], \quad i = \{1, 2\} \quad |3.2.2.1|$$

que l'on reporte dans les équations de départ |3.1.2|.

Après identification et simplifications, nous obtenons un système de 8 équations à 10 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 = - \frac{F}{2(m_1 + m_2)} \\ b_1 = b_2 \\ c_1 - c_2 = \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\ m_1 A_1 \sin \psi_1 + m_2 A_2 \sin \psi_2 = 0 \\ m_1 A_1 \cos \psi_1 + m_2 A_2 \cos \psi_2 = - \frac{E}{\omega^2} \\ A_1 \cos \psi_1 + A_2 \left(\frac{m_2 \omega^2}{k} - 1 \right) \cos \psi_2 = 0 \\ A_1 \sin \psi_1 + A_2 \left(\frac{m_2 \omega^2}{k} - 1 \right) \sin \psi_2 = 0 \end{array} \right. \quad |3.2.2.2|$$

Les 4 dernières équations se réduisent à :

$$\begin{cases} A_1 \sin \psi_1 = 0 \\ A_2 \sin \psi_2 = 0 \\ A_1 \cos \psi_1 = \frac{E}{\omega^2} \frac{-k+m_2\omega^2}{k(m_1+m_2)-m_1m_2\omega^2} \\ A_2 \cos \psi_2 = \frac{E}{\omega^2} \frac{-k}{k(m_1+m_2)-m_1m_2\omega^2} \end{cases}$$

A_1 et A_2 ne sont pas nuls ; il reste $\sin \psi_i = 0$

soit : $\psi_i = p_i \pi$ (p_i entier), $i = \{1,2\}$

A_i et ψ_i interviennent uniquement dans l'équation |3.2.2.1| sous la forme $A_i \cos [\omega(t+\theta)+\psi_i] = A_i \cos [\omega(t+\theta) + p_i \pi]$

$$= A_i \cos p_i \pi \cos [\omega(t+\theta)]$$

$$= [A_i \times \cos \psi_i] \cos [\omega(t+\theta)]$$

Ainsi A_i et ψ_i interviennent uniquement sous la forme $[A_i \cos \psi_i]$.

Nous pouvons donc prendre $p_i = 0$, $i = \{1,2\}$; il reste ainsi :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{E}{\omega^2} \frac{-k+m_2\omega^2}{k(m_1+m_2)-m_1m_2\omega^2} \\ A_2 = \frac{E}{\omega^2} \frac{-k}{k(m_1+m_2)-m_1m_2\omega^2} \end{cases} \quad |3.2.2.3|$$

Pour définir complètement les solutions particulières |3.2.2.1| et supprimer la double indétermination du système d'équations |3.2.2.2|, nous choisissons les 2 conditions arbitraires suivantes :

$$b_2 = 0$$

$$\text{et } c_2 = 0$$

Nous en déduisons :

$$b_1 = 0$$

$$\text{et } c_1 = \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

3.2.3 - Solution des équations complètes

Le système d'équations différentielles [3.1.2] a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha t + \beta + A_0 m_2 \cos(\Omega_2 t + \psi_0) - \frac{F}{2(m_1 + m_2)} t^2 + \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{E}{\omega^2} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos[\omega(t + \theta)] \\ x_2 = \alpha t + \beta - A_0 m_1 \cos(\Omega_2 t + \psi_0) - \frac{F}{2(m_1 + m_2)} t^2 + \frac{E}{\omega^2} \frac{-k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos[\omega(t + \theta)] \end{cases}$$

[3.2.3.1]

Les 4 inconnues α , β , A_0 et ψ_0 sont déterminées à partir des conditions initiales (immédiatement après la première percussion).

$$t = 0' \quad \begin{cases} x_1(0') = e - \Delta x_2 \\ x_2(0') = -\Delta x_2 \\ \dot{x}_1(0') = \dot{x}_1^+ \\ \dot{x}_2(0') = \Delta V_2 \end{cases} \quad [3.2.3.2]$$

soit :

$$\begin{cases} e - \Delta x_2 = \beta + A_0 m_2 \cos \psi_0 + \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{E}{\omega^2} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos \omega \theta \\ -\Delta x_2 = \beta - A_0 m_1 \cos \psi_0 + \frac{E}{\omega^2} \frac{-k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos \omega \theta \\ \dot{x}_1^+ = \alpha - A_0 m_2 \Omega_2 \sin \psi_0 - \frac{E}{\omega} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \sin \omega \theta \\ \Delta V_2 = \alpha + A_0 m_1 \Omega_2 \sin \psi_0 + \frac{E}{\omega} \frac{k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \sin \omega \theta \end{cases} \quad [3.2.3.3]$$

Nous en déduisons :

$$\alpha = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 \dot{x}_1^+ + m_2 \Delta V_2 - \frac{E}{\omega} \sin \omega \theta]$$

ou :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 \dot{x}_1^+ - \frac{E}{\omega} \sin \omega \theta] \\ \beta = -\Delta x_2 + \frac{1}{m_1 + m_2} \left[m_1 e - \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{E}{\omega^2} \cos \omega \theta \right] \\ A_0 \cos \psi_0 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[e - \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 E \cos \omega \theta}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \right] \\ A_0 \sin \psi_0 = \frac{1}{\Omega_2 (m_1 + m_2)} \left[\Delta V_2 - \dot{x}_1^+ - \frac{m_2 E \omega \sin \omega \theta}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \right] \end{cases} \quad [3.2.3.4]$$

A_0 et ψ_0 peuvent être calculés à partir des 2 dernières équations.

3.3 - CALCUL DE Δt

Le glissement du pieu s'arrête au temps Δt défini par :

$$\dot{x}_2(\Delta t) = 0 \quad |3.3.1|$$

Nous avons :

$$\dot{x}_2(t) = \alpha + A_0 m_1 \Omega_2 \sin(\Omega_2 t + \psi_0) - \frac{F}{m_1 + m_2} t + \frac{E}{\omega} \frac{k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \sin[\omega(t + \theta)]$$

Pour $0 \leq t \leq \Delta t$, nous pouvons faire un développement de $\dot{x}_2(t)$ limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & \alpha + A_0 m_1 \Omega_2 \sin \psi_0 + \frac{E}{\omega} \frac{k \sin \omega \theta}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \\ & + \left[A_0 m_1 \Omega_2^2 \cos \psi_0 - \frac{F}{m_1 + m_2} + \frac{E k \cos \omega \theta}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \right] t + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2(t) = \Delta V_2 + \frac{ke - F}{m_2} t + O(t^2)$$

Nous en déduisons :

$$\Delta t = \frac{m_2 \Delta V_2}{F - ke} = \frac{2NT}{\mu \omega_0} \quad |3.3.2|$$

Cette expression peut s'obtenir directement en écrivant que l'impulsion des forces agissant sur le pieu entre les instants τ et $\tau + \Delta t$, est égale à la variation de la quantité de mouvement (F restant constant), soit :

$$[-F + k(e - x_2)] dt = d(m_2 \dot{x}_2)$$

Intégrons cette équation sur l'intervalle $[\tau, \tau + \Delta t]$

$$(-F + ke) \Delta t - k \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} x_2 dt = -m_2 \Delta V_2 \quad 3.3.3$$

Le déplacement $x_2(t)$ a pour expression sur $[\tau, \tau + \Delta t]$

$$x_2(t) = \Delta V_2 (t - \tau) + O[(t - \tau)^2]$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} x_2 dt &= \int_{\tau}^{\tau + \Delta t} \Delta V_2 (t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{2} \Delta V_2 \cdot (\Delta t)^2 \end{aligned}$$

Reportons cette expression dans l'équation |3.3.3| ; nous obtenons :

$$(-F+ke)\Delta t - \frac{1}{2} k \Delta V_2 (\Delta t)^2 + m_2 \Delta V_2 = 0$$

ou encore, en se servant des résultats trouvés au chapitre 1 :

$$\frac{1}{2} \mu \omega_o^2 (\Delta t)^2 + \frac{\mu \omega_o}{2T} \Delta t - 1 = 0$$

Cette équation a 2 racines de signes contraires. Nous retenons la racine positive :

$$\Delta t = \frac{1}{2\omega_o T} \left[\sqrt{1 + \frac{8T^2}{\mu}} - 1 \right]$$

Le calcul numérique montre que nous avons $\frac{8T^2}{\mu} < 0,12$; nous pouvons faire un développement limité au second ordre ; il reste :

$$\Delta t = \frac{2T}{\mu \omega_o} \left[1 - \frac{2T^2}{\mu} \right] \quad \text{avec} \quad \frac{2T^2}{\mu} < 3 \times 10^{-2}$$

L'hypothèse faite sur Δt sera acceptable si nous avons :

$$\boxed{\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{rT}{\pi N \mu} < 1} \quad |3.3.3|$$

3.4 - CALCUL DE Δx_2

L'enfoncement du pieu est calculé en explicitant l'équation suivante :

$$x_2(\Delta t) = 0 \quad |3.4.1|$$

Pour $0 \leq t \leq \Delta t$, nous pouvons faire un développement de $x_2(t)$ limité au second ordre :

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \beta - A_o m_1 \cos \psi_o - \frac{E}{\omega^2} \frac{k \cos \omega \theta}{k(m_1+m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \\ & + \left[\alpha + A_o m_1 \Omega_2 \sin \psi_o + \frac{E}{\omega} \frac{k \sin \omega \theta}{k(m_1+m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \right] t \\ & + \frac{1}{2} \left[A_o m_1 \Omega_2^2 \cos \psi_o - \frac{F}{m_1+m_2} + \frac{E k \cos \omega \theta}{k(m_1+m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \right] t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

$$x_2(t) = -\Delta x_2 + \Delta V_2 \cdot t - \frac{1}{2} \frac{F-ke}{m_2} t^2 + O(t^3) \quad |3.4.2|$$

Pour $t = \Delta t$, nous obtenons :

$$\boxed{\Delta x_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2}{F-ke} (\Delta V_2)^2} \quad 3.4.3$$

C'est la relation |1.6.4.2| obtenue en exprimant la conservation de l'énergie du système et en supposant Δx_2 petit.

3.5 - CALCUL DE Δx_1

La variation de $x_1(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$ est :

$$\Delta x_1 = x_1(\Delta t) - x_1(0') \quad |3.5.1|$$

Pour $0 \leq t \leq \Delta t$, nous pouvons faire un développement de $x_1(t)$ limité au second ordre :

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \beta + A_0 m_2 \cos \psi_0 + \frac{F}{k} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{E}{\omega^2} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos \omega \theta \\ & + \left[\alpha - A_0 m_2 \Omega_2 \sin \psi_0 - \frac{E}{\omega} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \sin \omega \theta \right] t \\ & - \frac{1}{2} \left[A_0 m_2 \Omega_2^2 \cos \psi_0 + \frac{F}{m_1 + m_2} + E \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos \omega \theta \right] t^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = e - \Delta x_2 + \dot{x}_1^+ \cdot t - \frac{1}{2m_1} [ke - E \cos \omega \theta] t^2 + O(t^3) \quad |3.5.2|$$

Nous avons : $x_1(0') = e - \Delta x_2$

et : $x_1(\Delta t) = e - \Delta x_2 + \dot{x}_1^+ \cdot \Delta t - \frac{1}{2m_1} (ke - E \cos \omega \theta) (\Delta t)^2$

d'où : $\Delta x_1 = \dot{x}_1^+ \Delta t - \frac{1}{2m_1} (ke - E \cos \omega \theta) (\Delta t)^2$

$$\Delta x_1 = -4 \frac{R-\mu}{1+R} \frac{fd-e}{\mu} T^2 - (e - d \cos \omega \theta) \frac{2T^2}{\mu}$$

$$\Delta x_1 = -\frac{2T^2}{\mu} \left[2 \frac{R-\mu}{1+R} (fd-e) + e - d \cos \omega \theta \right] \quad |3.5.3|$$

Comparons Δx_1 à l'amplitude A des oscillations libres du percuteur, calculée au chapitre 1 (équation |1.7.3|) ou, ce qui revient au même, $\frac{\Delta x_1}{A}$ à l'unité :

$$\frac{\Delta x_1}{A} = \frac{2T}{\mu} \left[2 \frac{R-\mu}{1+R} + \frac{1 - \frac{d}{e} \cos \omega \theta}{f \left(\frac{d}{e} \right) - 1} \right] \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right) \quad |3.5.4|$$

Cette expression est majorée par :

$$\frac{\Delta x_1}{A} < \frac{2T}{\mu} \left[2 \frac{R-\mu}{1+R} + \frac{1 + \frac{d}{e}}{f \left(\frac{d}{e} \right) - 1} \right] \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right) \quad |3.5.5|$$

3.6 - CALCUL DE $\Delta \dot{x}_1$

La variation de $\dot{x}_1(t)$ sur l'intervalle de temps $[0', \Delta t]$ est :

$$\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1(\Delta t) - \dot{x}_1(0') \quad |3.6.1|$$

Pour $0 \leq t \leq \Delta t$, nous pouvons faire un développement de $\dot{x}_1(t)$ limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \alpha - A_0 m_2 \Omega_2 \sin \psi_0 - \frac{E}{\omega} \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \sin \omega \theta \\ & - [A_0 m_2 \Omega_2^2 \cos \psi_0 + \frac{F}{m_1 + m_2} + E \frac{-k + m_2 \omega^2}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2} \cos \omega \theta] t + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_1^+ - (ke - E \cos \omega \theta) \frac{t}{m_1} + O(t^2) \quad |3.6.2|$$

$$\text{Nous avons : } \dot{x}_1(0') = \dot{x}_1^+$$

$$\text{et : } \dot{x}_1(\Delta t) = \dot{x}_1^+ - (ke - E \cos \omega \theta) \frac{\Delta t}{m_1}$$

$$\text{d'où : } \Delta \dot{x}_1 = - (ke - E \cos \omega \theta) \frac{\Delta t}{m_1}$$

$$\Delta \dot{x}_1 = - \frac{2\omega_0 T}{\mu} (e - d \cos \omega \theta) \quad |3.6.3|$$

Comparons $\Delta \dot{x}_1$ à ΔV_1 , ou, ce qui revient au même, $\frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta V_1}$ à l'unité :

$$\frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta V_1} = \frac{1 - (\frac{d}{e}) \cos \omega \theta}{f(\frac{d}{e}) - 1} \quad |3.6.4|$$

Cette expression est majorée par :

$$\frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta V_1} < \frac{1 + \frac{d}{e}}{f(\frac{d}{e}) - 1} \quad |3.6.5|$$

Chapitre 4

VALEURS NUMERIQUES ET GRAPHES THEORIQUES

4.1 - INTRODUCTION

Compte-tenu des applications pratiques du système étudié, nous nous intéresserons tout spécialement à la vitesse de percussion, réduite sous la forme $\frac{\dot{x}_1}{\omega_o e}$, et à la vitesse moyenne d'enfoncement, réduite sous la forme $\frac{v_{moy}}{\omega_o e}$. Nous tracerons les graphes représentant les variations de $\frac{\dot{x}_1}{\omega_o e}$ et de $\frac{v_{moy}}{\omega_o e}$ en fonction de $r = \frac{\omega}{\omega_o}$, pour des valeurs constantes données aux quantités N , R , $\frac{e}{d}$, f et μ .

En analysant les courbes obtenues, nous déduirons les lois essentielles régissant le phénomène étudié.

Les calculs ont été effectués sur les ordinateurs IBM 370-135 du Centre de Calcul de l'Université de Nantes, et IBM 370-145 de l'Office Central de Mécanographie (Ministère de l'Economie et des Finances de la Côte d'Ivoire).

Rappelons les définitions des paramètres sans dimension intervenant dans les expressions de la vitesse de percussion et de la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu :

N : nombre entier de cycles décrits par l'excitation entre 2 percussions consécutives

R : coefficient de restitution de vitesse

$\frac{e}{d} = \frac{ke}{E}$: rapport du produit de la raideur du ressort par l'interstice et de l'amplitude de la force sinusoïdale d'excitation

$f = \frac{F}{E}$: rapport de la force de frottement, diminuée du poids de l'ensemble et de la force d'excitation

$r = \frac{\omega}{\omega_o}$: rapport de la pulsation d'excitation et de la pulsation propre du système

$\mu = \frac{m_1}{m_2}$: rapport de la masse du percuteur et de la masse de l'ensemble pieu + bâti.

4.2 - REALISATION APPROCHEE DE LA CONDITION SUFFISANTE -

La condition suffisante est telle que le déplacement relatif du percuteur ne peut être supérieur à l'interstice e entre 2 percussions consécutives. Elle est exprimée par la relation |1.4.2.1| :

$$y < e \text{ pour } p\tau < t < (p+1)\tau, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

et illustrée par la figure 1.4.

La condition suffisante devient, pour $t \neq p\tau$,

$$\frac{A}{e} \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{d}{e} \times \frac{1}{1-r^2} \cos(r \omega_0 t + \phi) < 1 \quad |4.2.1|$$

Nous pouvons réaliser une condition suffisante approchée en imposant à la relation |4.2.1| qu'elle soit vérifiée, non pas quel que soit t compris entre $p\tau$ et $(p+1)\tau$, mais pour $t = \frac{p\tau}{50}, \frac{2p\tau}{50}, \dots, \frac{49p\tau}{50}$ ou, pratiquement, puisque $\omega_0 \tau = \frac{2N\pi}{r}$, pour :

$$\omega_0 t = \frac{1}{50} \frac{2N\pi}{r}, \frac{2}{50} \frac{2N\pi}{r}, \dots, \frac{49}{50} \frac{2N\pi}{r}$$

Il est possible de concevoir que, pour t compris entre $\frac{m}{50} \cdot \frac{2N\pi}{r}$ et $\frac{(m+1)}{50} \cdot \frac{2N\pi}{r}$, avec m entier inférieur à 49, la condition ne soit pas vérifiée. Cependant, l'expérimentation nous a montré que la condition approchée donne des résultats satisfaisants.

4.3 - RECHERCHE DES RACINES DU POLYNOME DU QUATRIEME DEGRE $B(T) = 0$

Les racines du polynôme du quatrième degré $B(T) = 0$ ont été calculées à l'aide de la méthode de Bairstow. Seules les racines réelles et positives ont été retenues.

4.4 - VALEURS NUMERIQUES ET GRAPHES

4.4.1 - Valeurs numériques des paramètres

Les valeurs numériques retenues pour les calculs sont les suivantes :

$$N = 1/2/3/4/5/6$$

$$R = 0,1/0,3/0,45/0,6/0,8/1$$

$$\frac{e}{d} = 0,5/0,75/1/1,3/1,6/1,8/2/5/9$$

$$f = 1/2/5/10/15/20/25/30/50$$

$$\mu = 0,01/0,05/0,1/0,2/0,3/0,4/0,5/0,75/1$$

r varie de 0,14 à 10, avec un pas variable facilitant le tracé des courbes.

4.4.2 - Programme de calcul

Le programme de calcul est écrit en langage FORTRAN.

Les valeurs des paramètres ne satisfaisant pas l'une des conditions suivantes ont été rejetées au fur et à mesure de leur rencontre :

$$\left\{ \begin{array}{l} f - \frac{e}{d} > 0 \\ \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \neq 0 \\ T \in \mathbb{R}^+ \\ \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left(\frac{\omega_0 \tau}{2} + \psi \right) < 0 \\ y < e \end{array} \right.$$

Lorsque toutes ces conditions étaient réalisées, nous avons recherché si le mouvement correspondant était stable ou non.

Le programme de calcul est présenté en annexe 1.

4.4.3 - Présentation des résultats

Les résultats des calculs numériques sont présentés sous la forme des graphes des fonctions

$$\frac{\dot{x}_1}{\omega_0 e} = f(r) \quad \text{et} \quad \frac{v_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$$

pour $N, R, \frac{e}{d}, f, \mu$ constants.

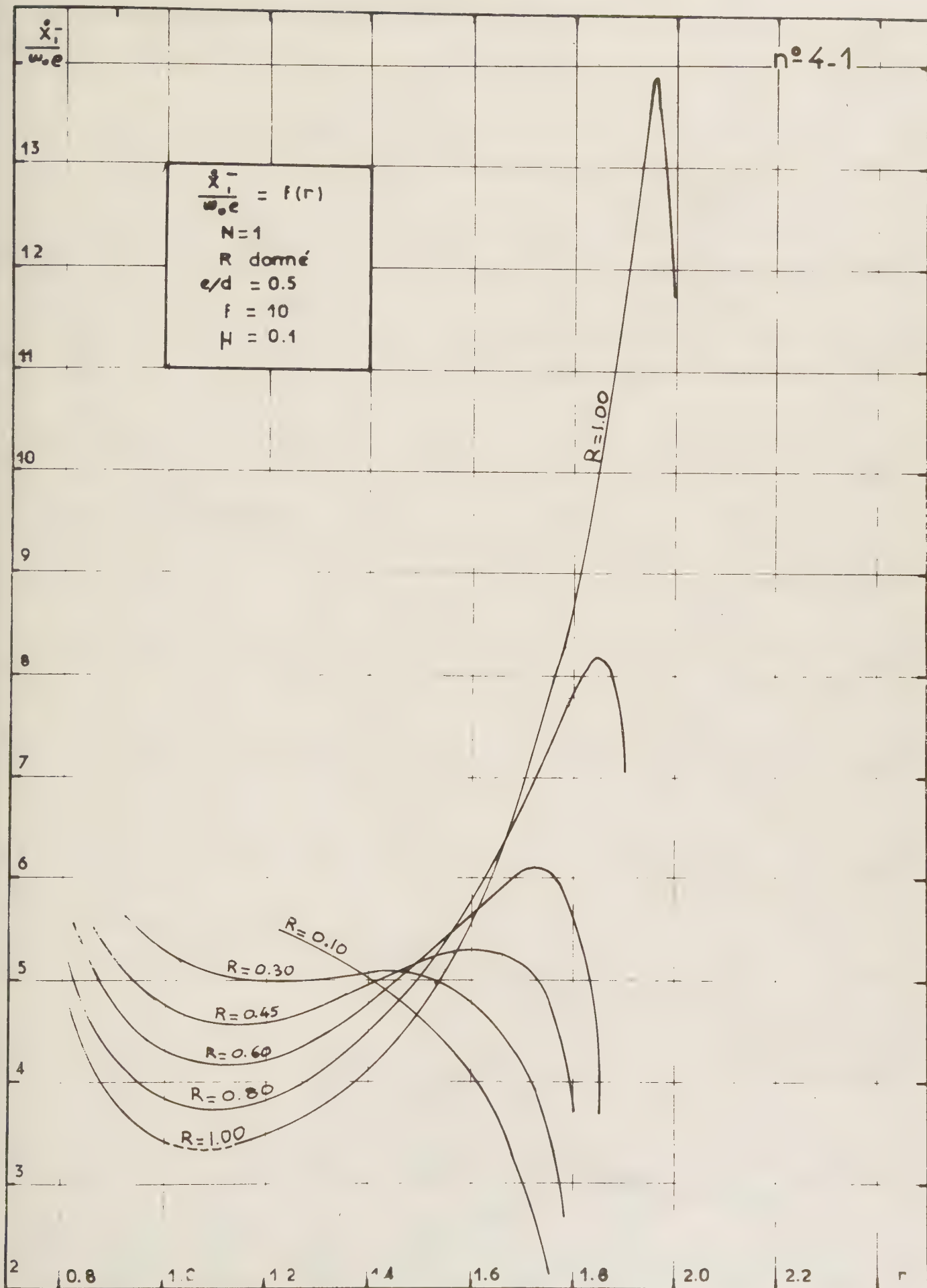
Il n'est pas possible de représenter tous les résultats obtenus, en raison de leur nombre élevé. Aussi, ne présentons nous que les graphes qui, à notre avis, sont les plus représentatifs pour l'analyse du système étudié.

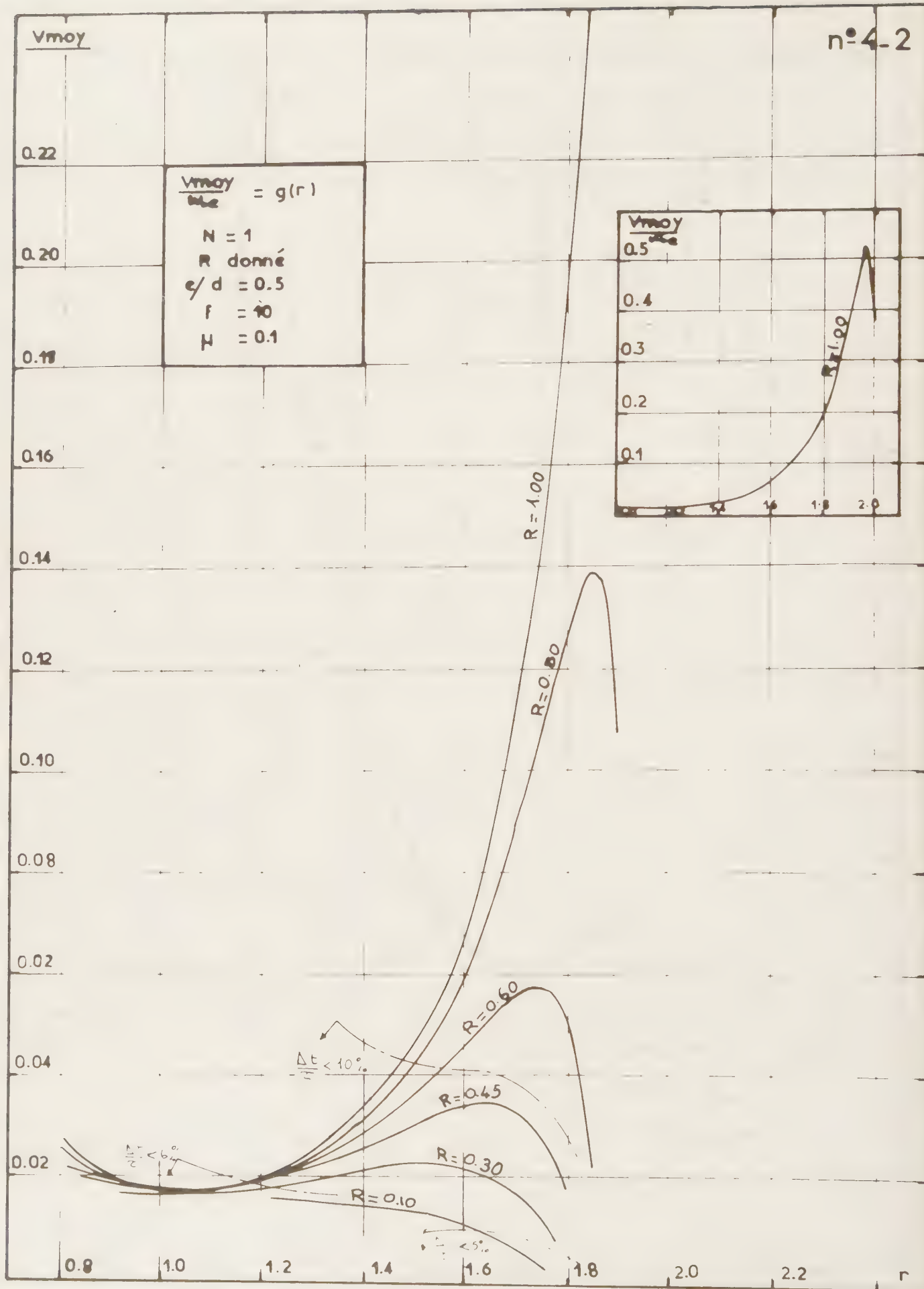
Notons que les arcs de courbe correspondant à un fonctionnement non stable sont représentés en traits interrompus courts.

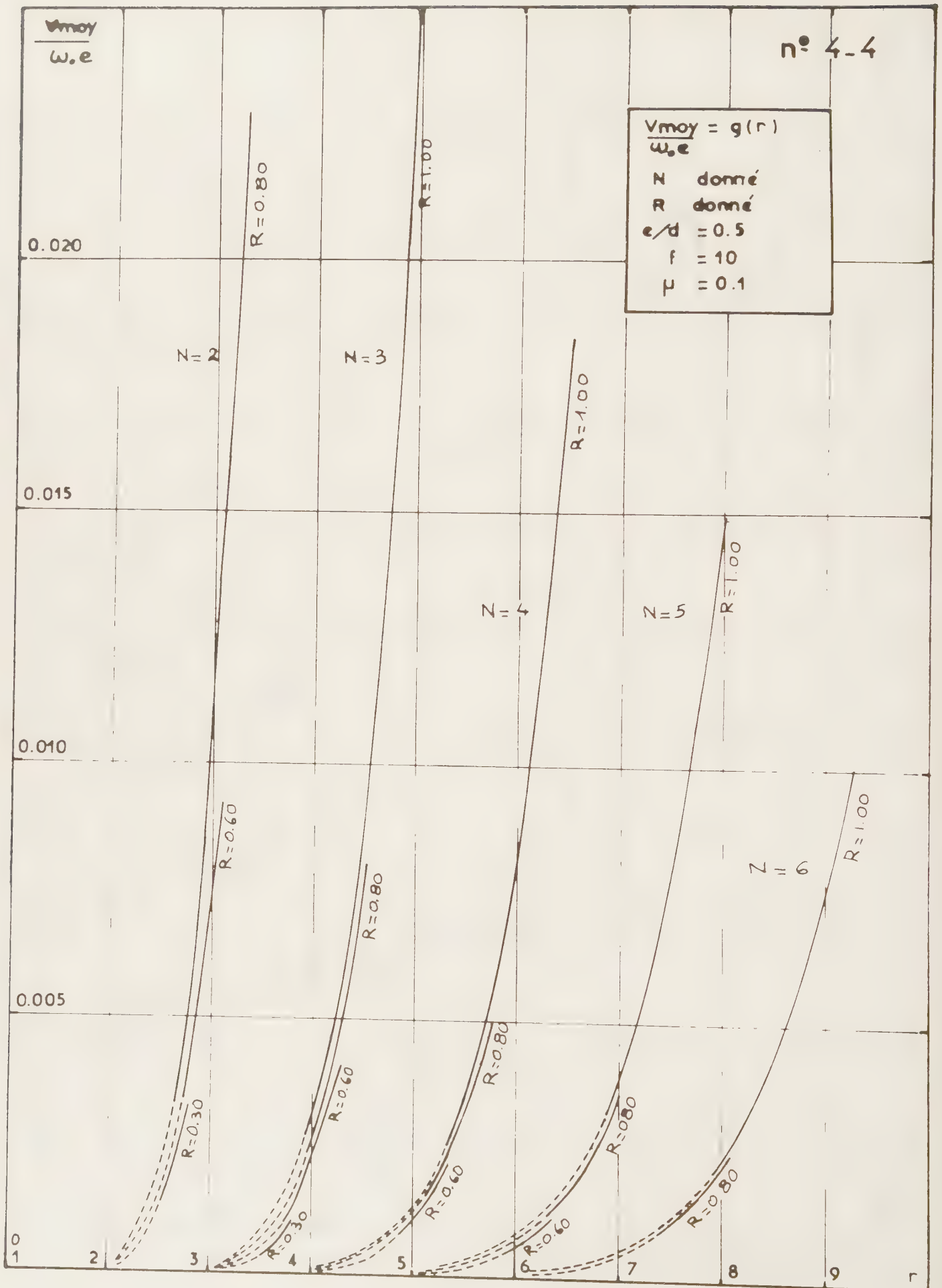
Les zones où le rapport $\frac{\Delta t}{\tau}$ est inférieur à $x\%$ ($x = 2, 5, 6, 10$) sont limitées sur certains graphes par un trait mixte fin.

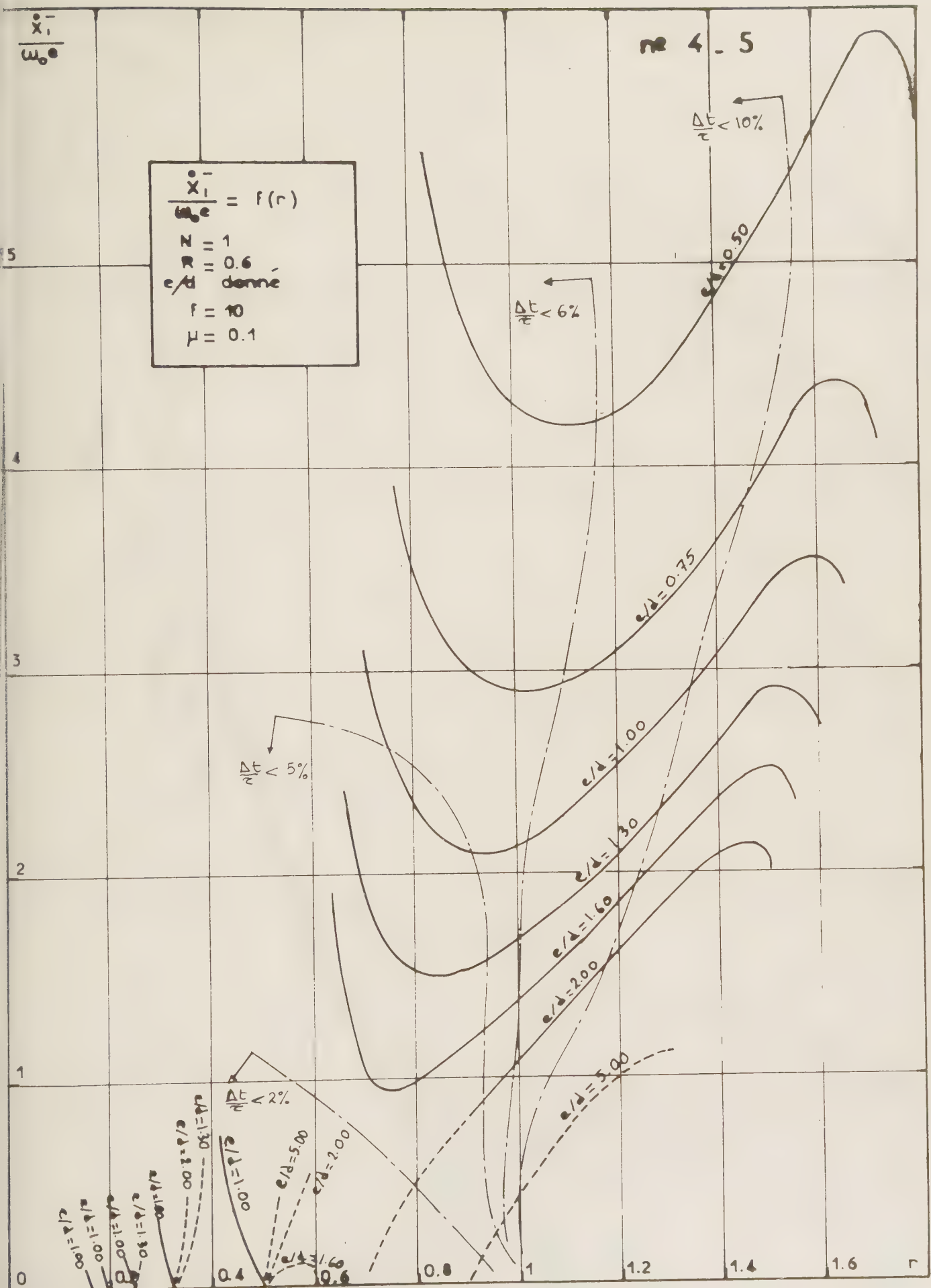
Nous avons tracé 18 planches. Chacune d'elles représente les variations de $\frac{\hat{x}_1}{\omega_0 e}$ ou de $\frac{v_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$ en fonction de r , pour $N = 1$ ou $N > 1$, pour une série de valeurs discrètes données à un des paramètres, R , $\frac{e}{d}$, f ou μ , les autres paramètres étant fixés. Ces planches sont répertoriées dans le tableau suivant :

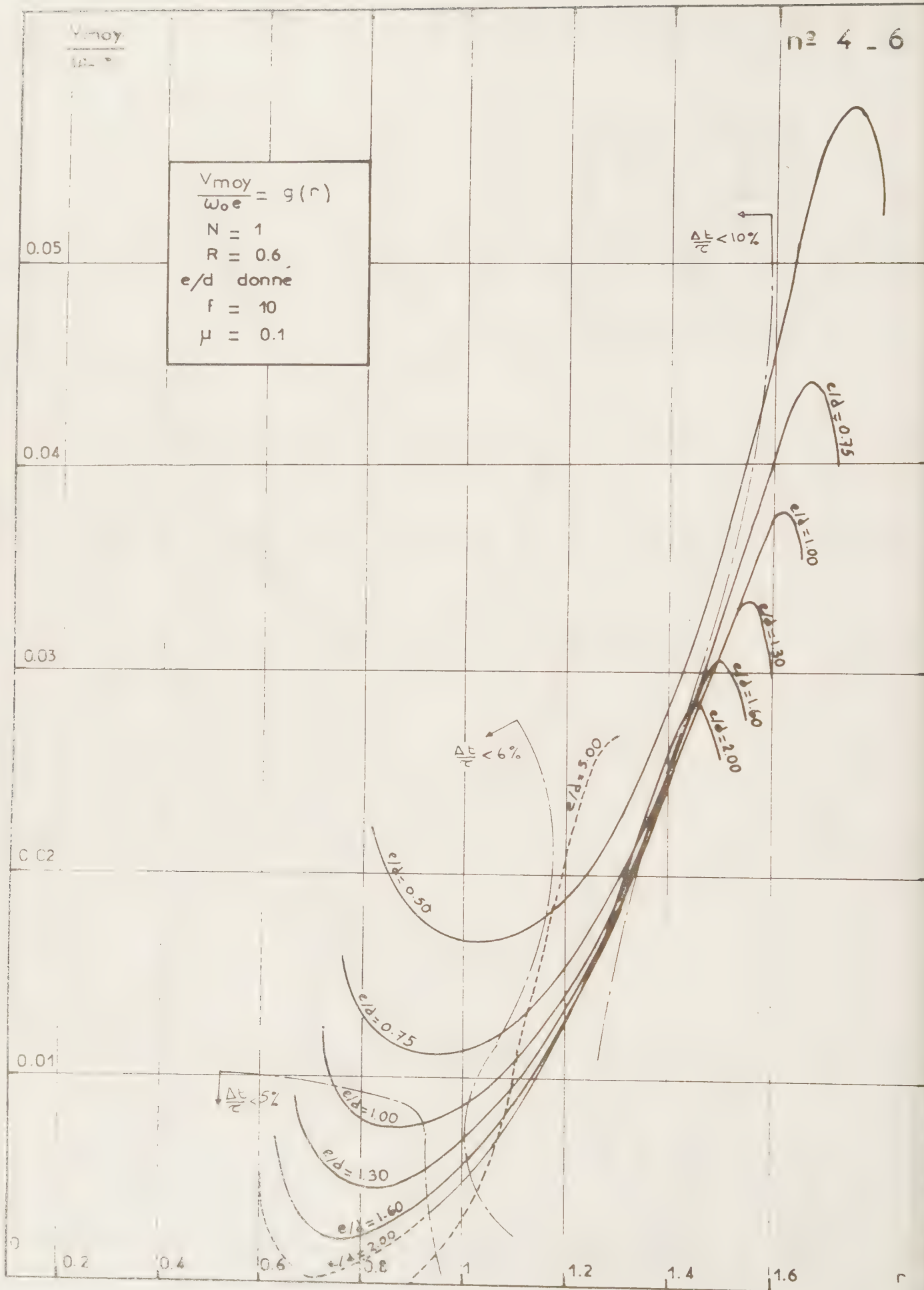
n°	$\hat{x}_1$	v_{moy}	N	R	e/d	f	μ
4-1	×		1	donné	0,50	10	0,10
4-2		×	1				
4-3	×		> 1				
4-4		×	> 1				
4-5	×		1	0,60	donné	10	0,10
4-6		×	1				
4-7	×		> 1				
4-8		✓	> 1				
4-9	×		1	0,60	0,50	donné	0,10
4-10		×	1				
4-11	×		> 1				
4-12		×	> 1				
4-13	×		donné	0,60	5,00	donné	0,10
4-14		×					
4-15	×		1	0,60	0,50	10	donné
4-16		×	1				
4-17	×		> 1				
4-18		×	> 1				





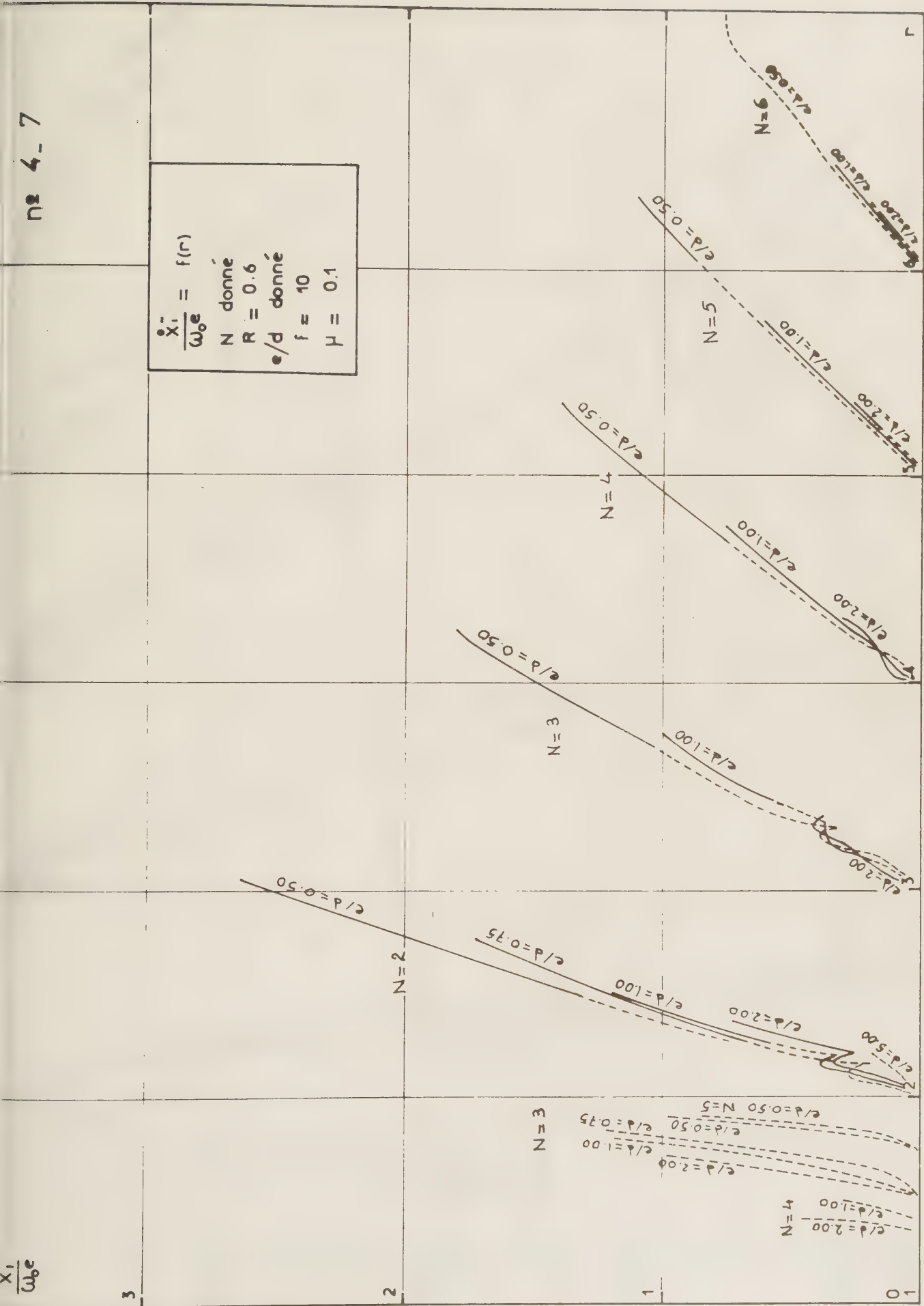






n° 4-7

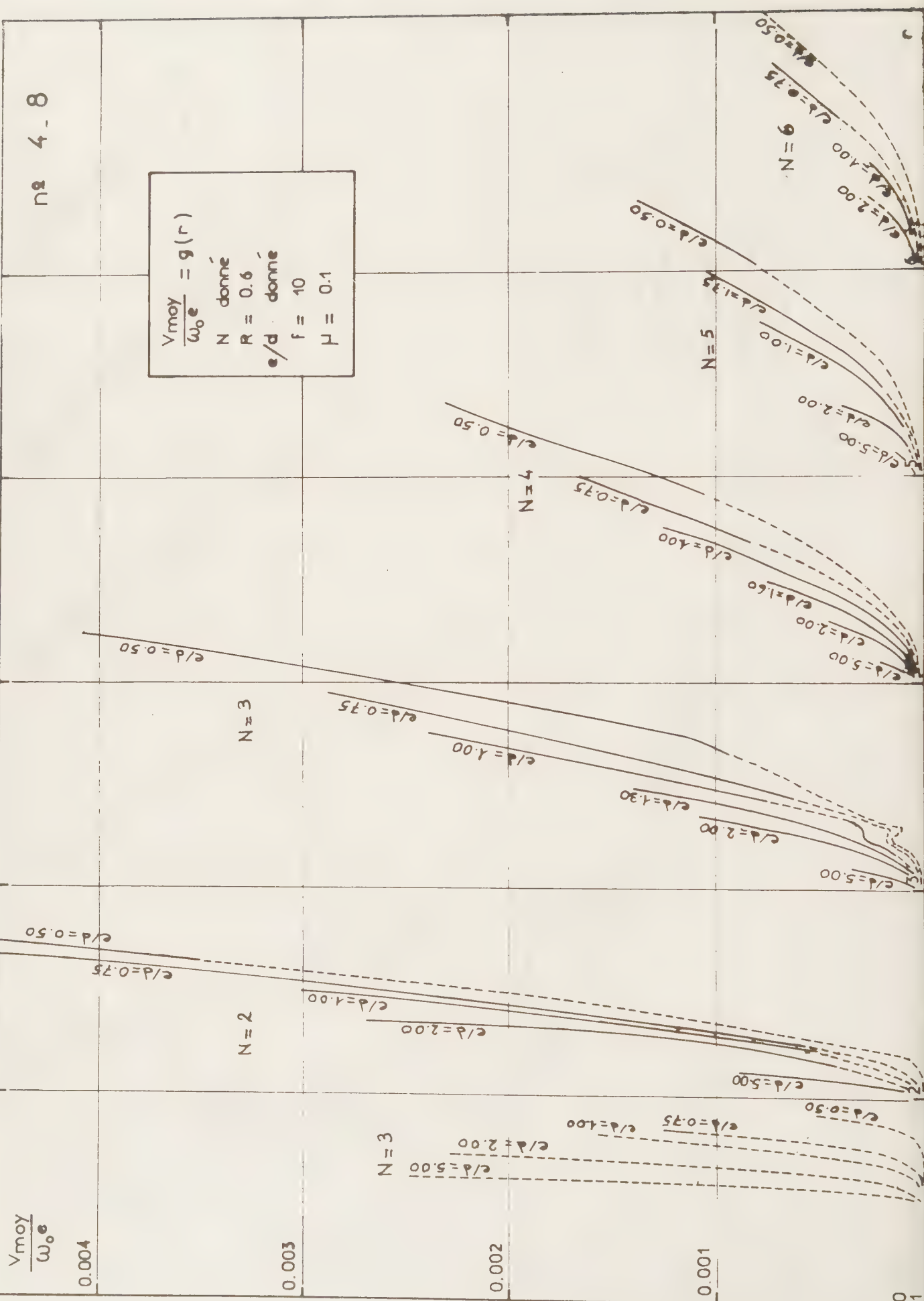
$\frac{\dot{X}_1}{\omega_0 e} = f(r)$
N donné
R = 0.6
e/d donné
f = 10
μ = 0.1



ns 4-8

$$\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$$

N donné
 $R = 0.6$
 e/d donné
 $f = 10$
 $\mu = 0.1$



$$\frac{\dot{x}_1}{\omega_0 e}$$

no 4-9

$$\frac{\dot{x}_1}{\omega_0 e} = f(r)$$

$N = 1$
 $\mu = 0.6$
 $e/d = 0.5$
 f donné
 $\mu = 0.1$

6

5.5

5

4.5

4

0.2

0.4

0.6

0.8

1.0

1.2

1.4

1.6

1.8

r

$f=10$

$f=5$

$f=2$

$f=10$

$f=10$

$f=5$

$f=2$

n° 4-10

$\frac{v_{moy}}{w_0 c}$

0.09

0.8

0.07

0.06

0.05

0.04

0.03

0.02

0.01

0

0.2

0.4

0.6

0.8

1

1.2

1.4

1.6

1.8

r

$$\frac{v_{moy}}{w_0 c} = g(r)$$

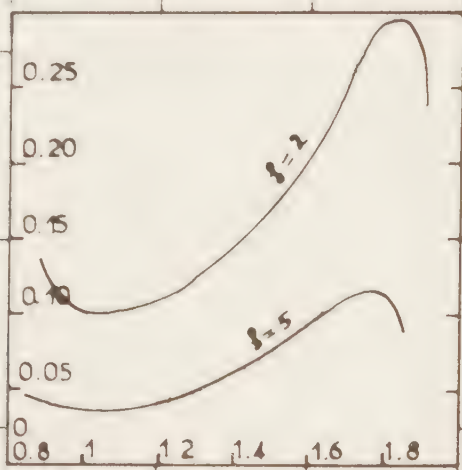
$$N = 1$$

$$R = 0.60$$

$$\epsilon_d = 0.50$$

$$f \text{ donné}$$

$$\mu = 0.10$$



$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} < 10\%$$

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} < 5\%$$

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} < 2\%$$

$$f=5$$

$$f=10$$

$$f=15$$

$$f=20$$

$$f=25$$

$$f=30$$

$$f=50$$

$$f=5$$

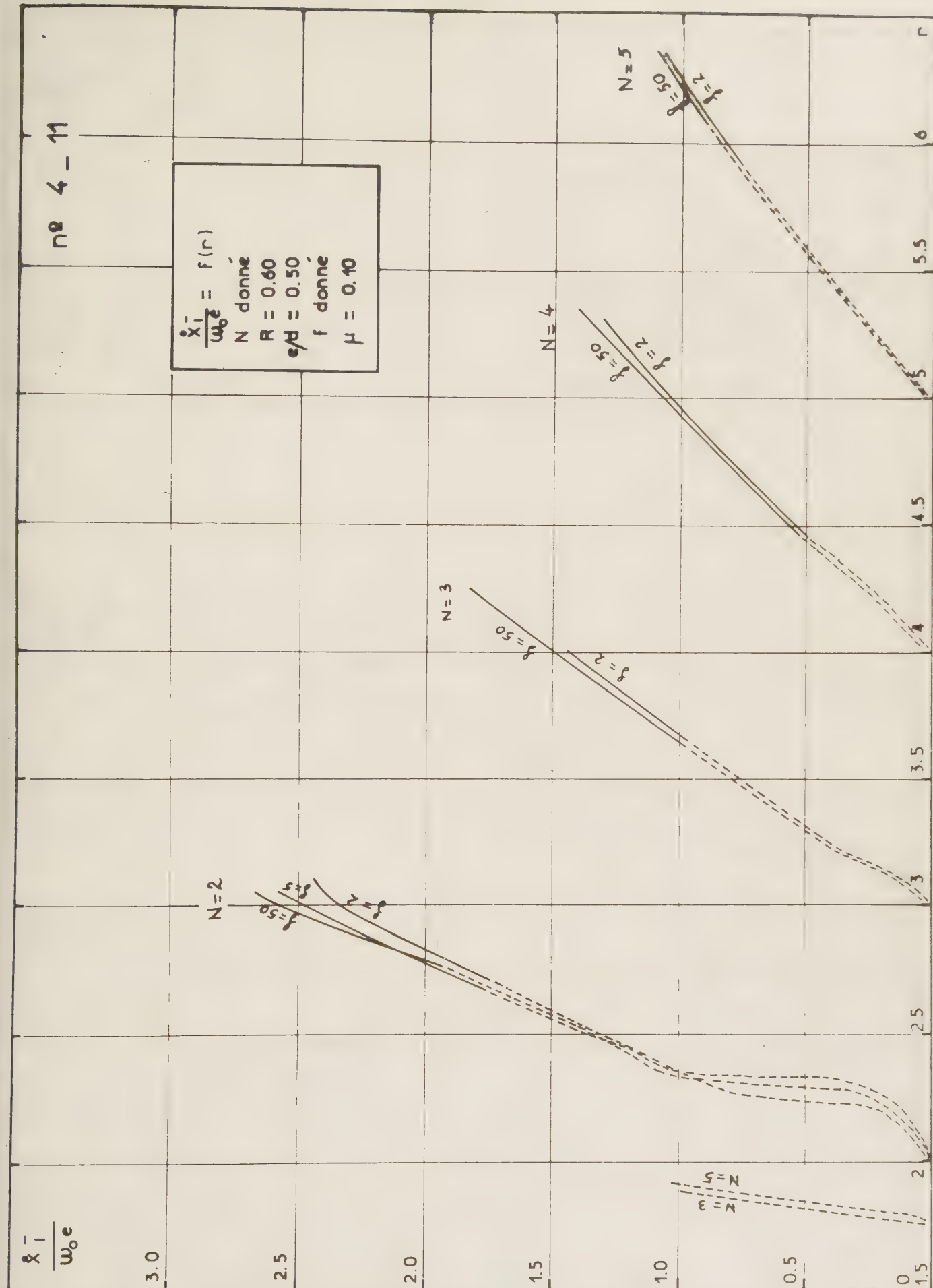
BU 4-11

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

N donne

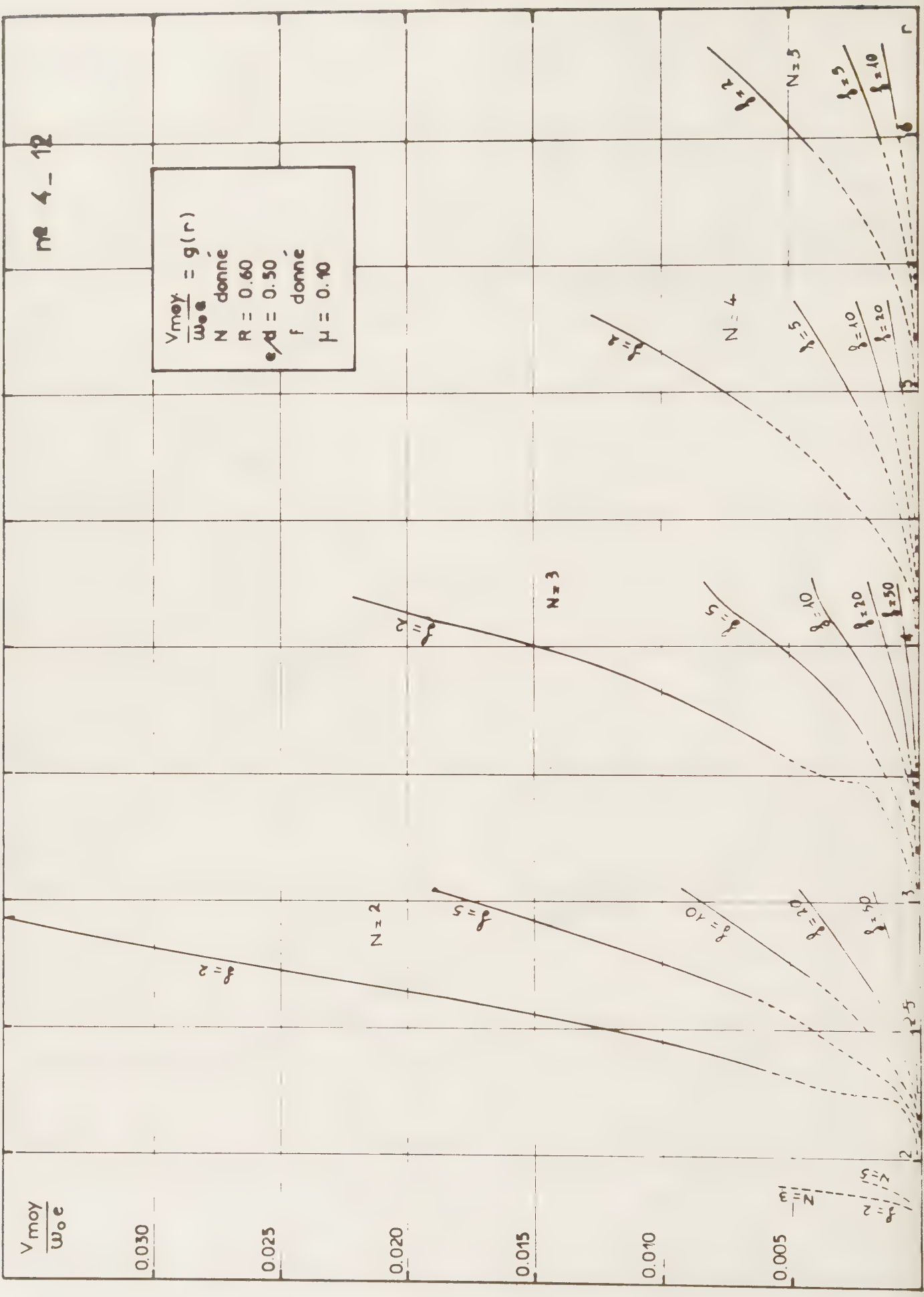
$$R = 0.60$$
$$e^{\lambda} = 0.50$$

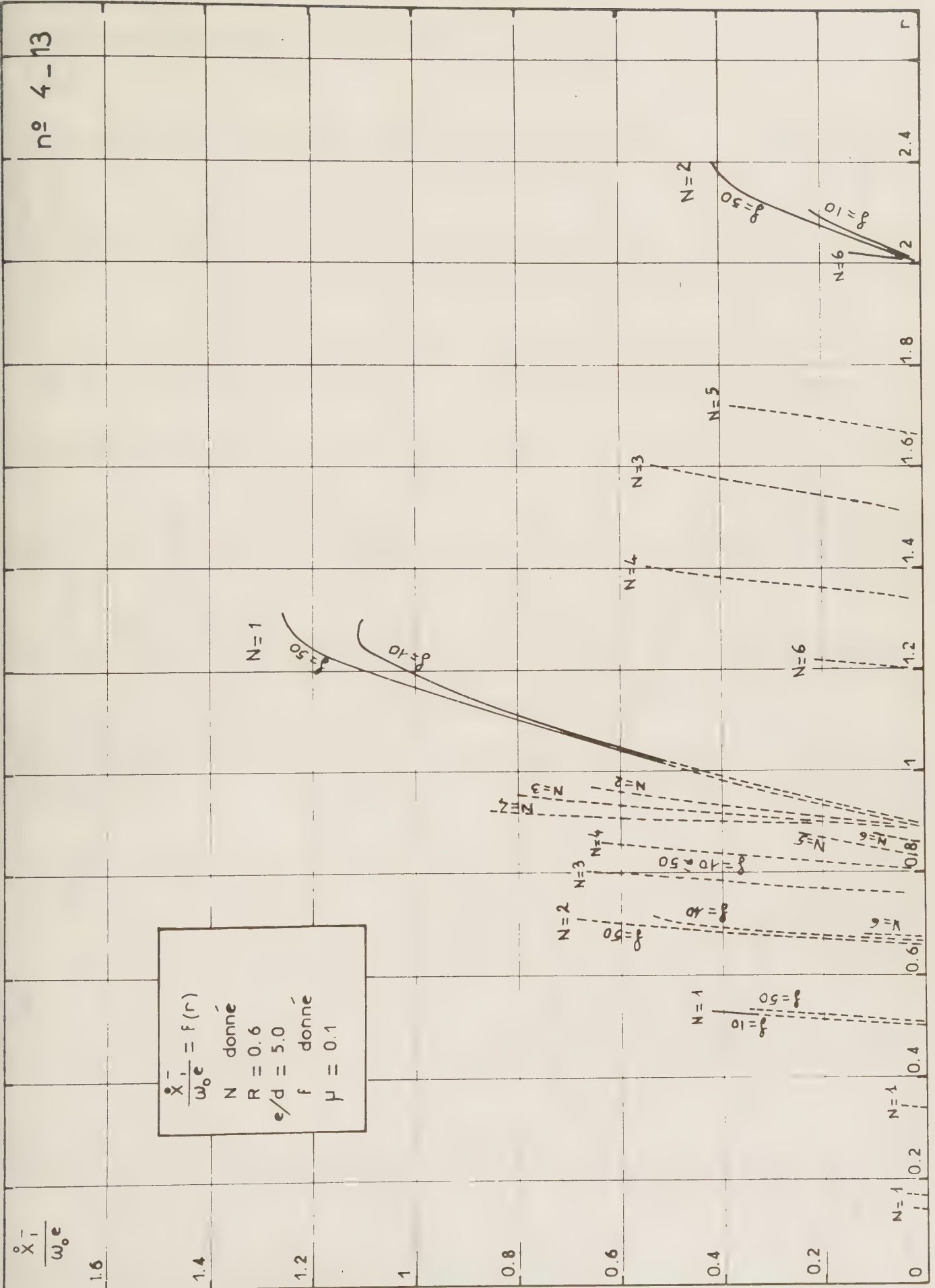
f donne

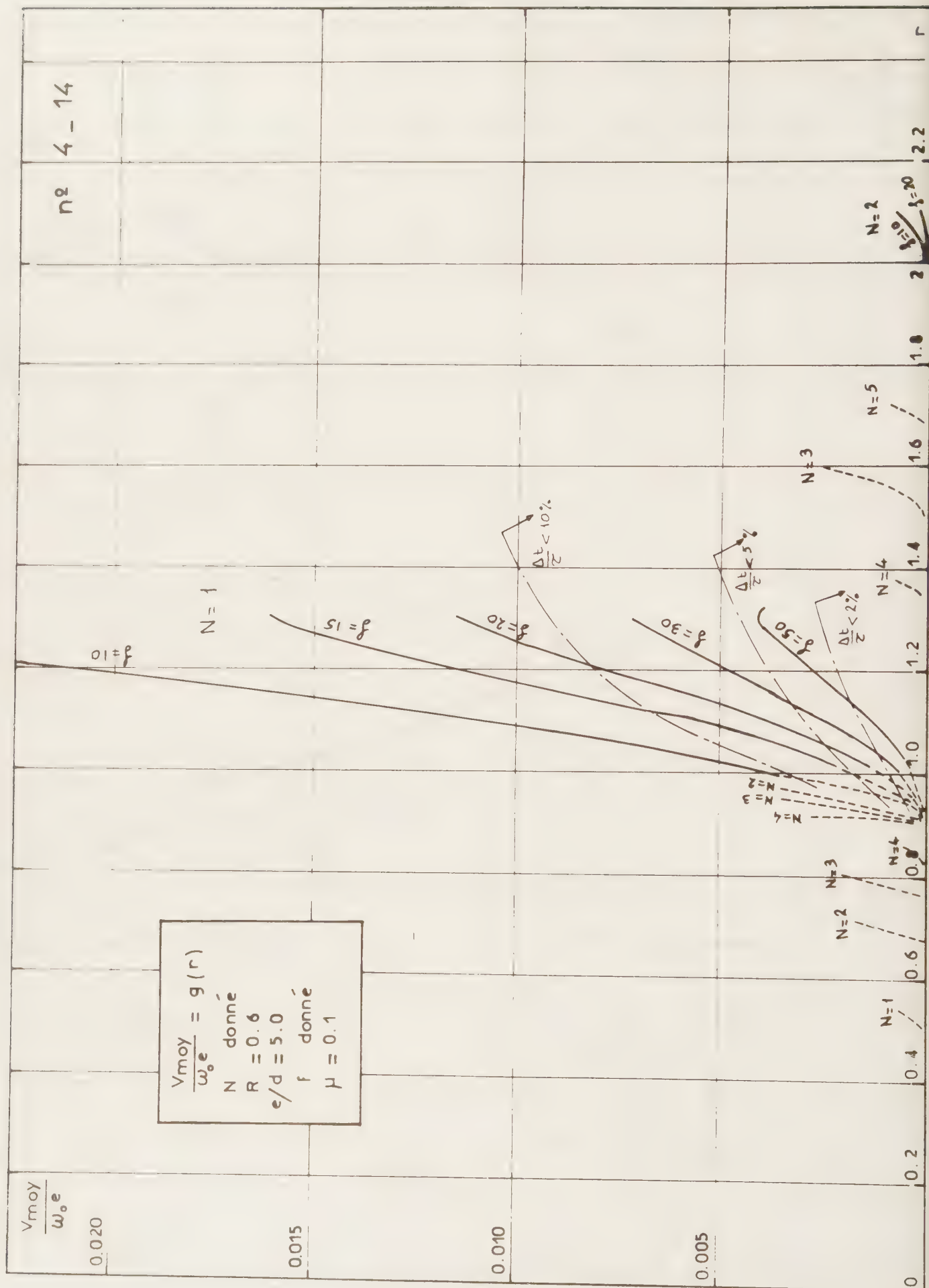
$$2.0 = 1$$


no 4-12

$\frac{V_{moy}}{\omega_0 e} = g(r)$
N donné
R = 0.60
e/d = 0.50
f donné
 $\mu = 0.10$



$$\begin{array}{r} 413 \\ \hline \end{array}$$




no 4 - 15

$$\frac{\dot{x}_1}{\omega_e} = f(r)$$

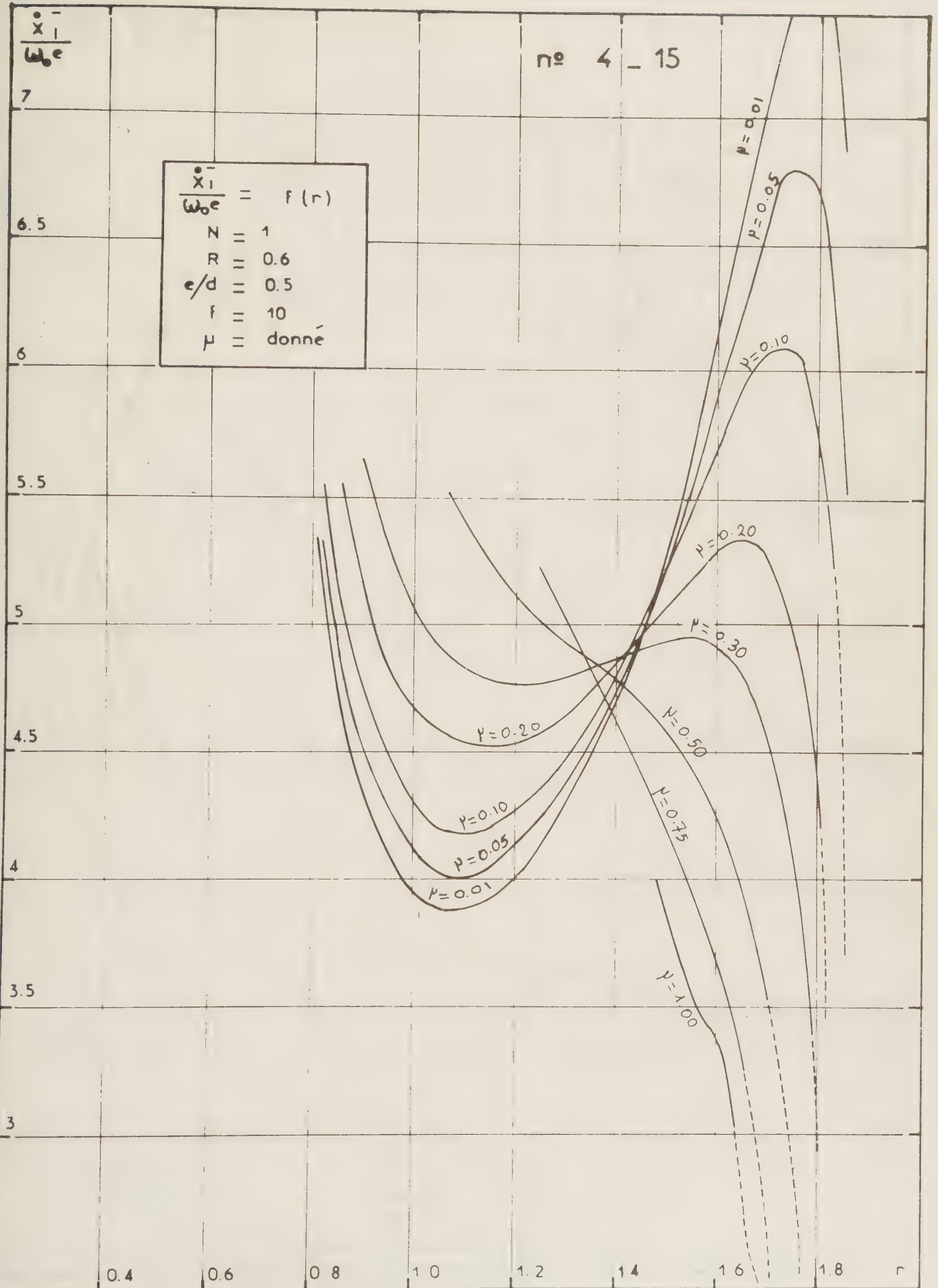
$$N = 1$$

$$R = 0.6$$

$$e/d = 0.5$$

$$f = 10$$

$$\mu = \text{donné}$$



no 4 - 16

$$\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$$

$$\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$$

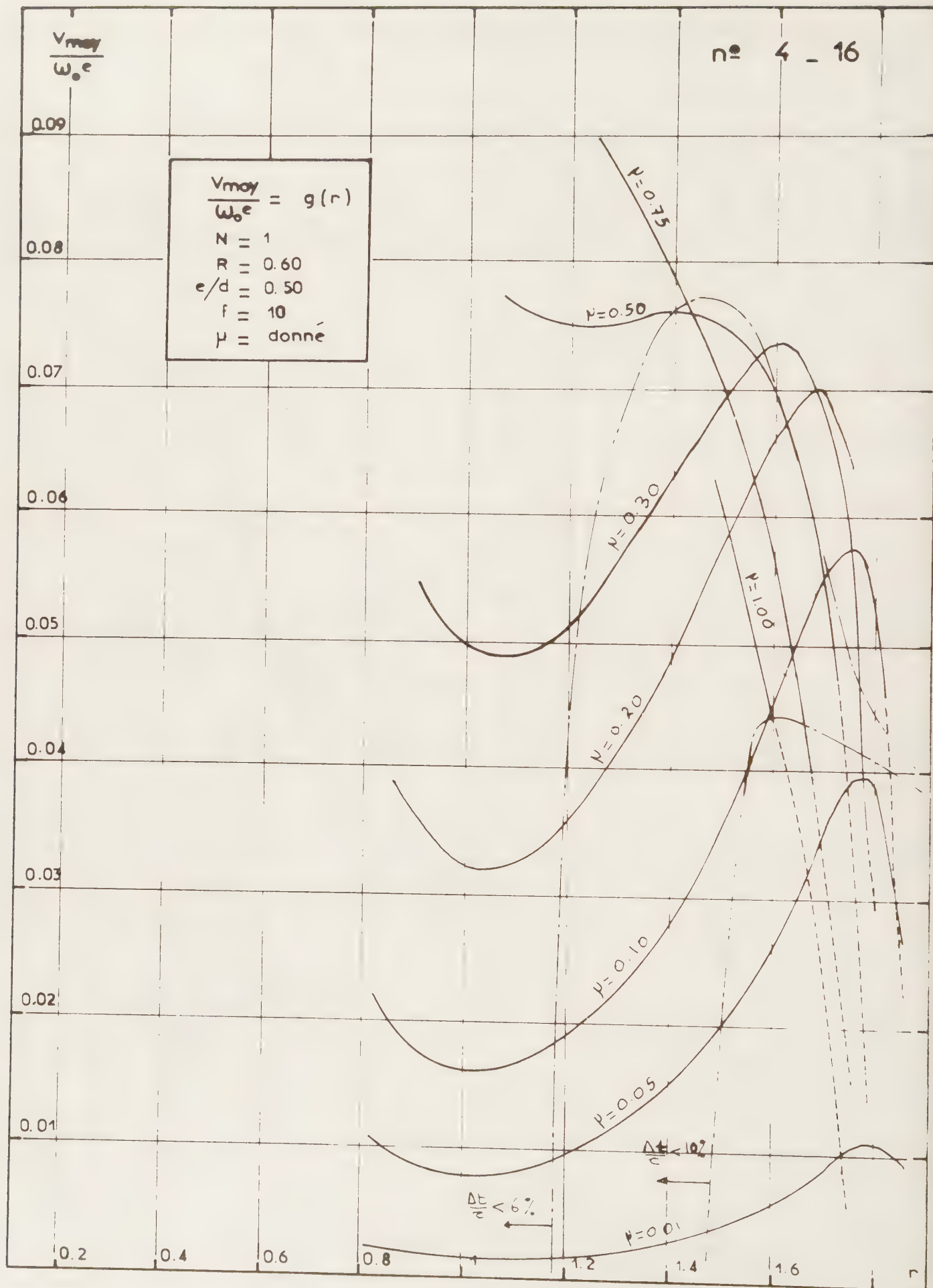
$$N = 1$$

$$R = 0.60$$

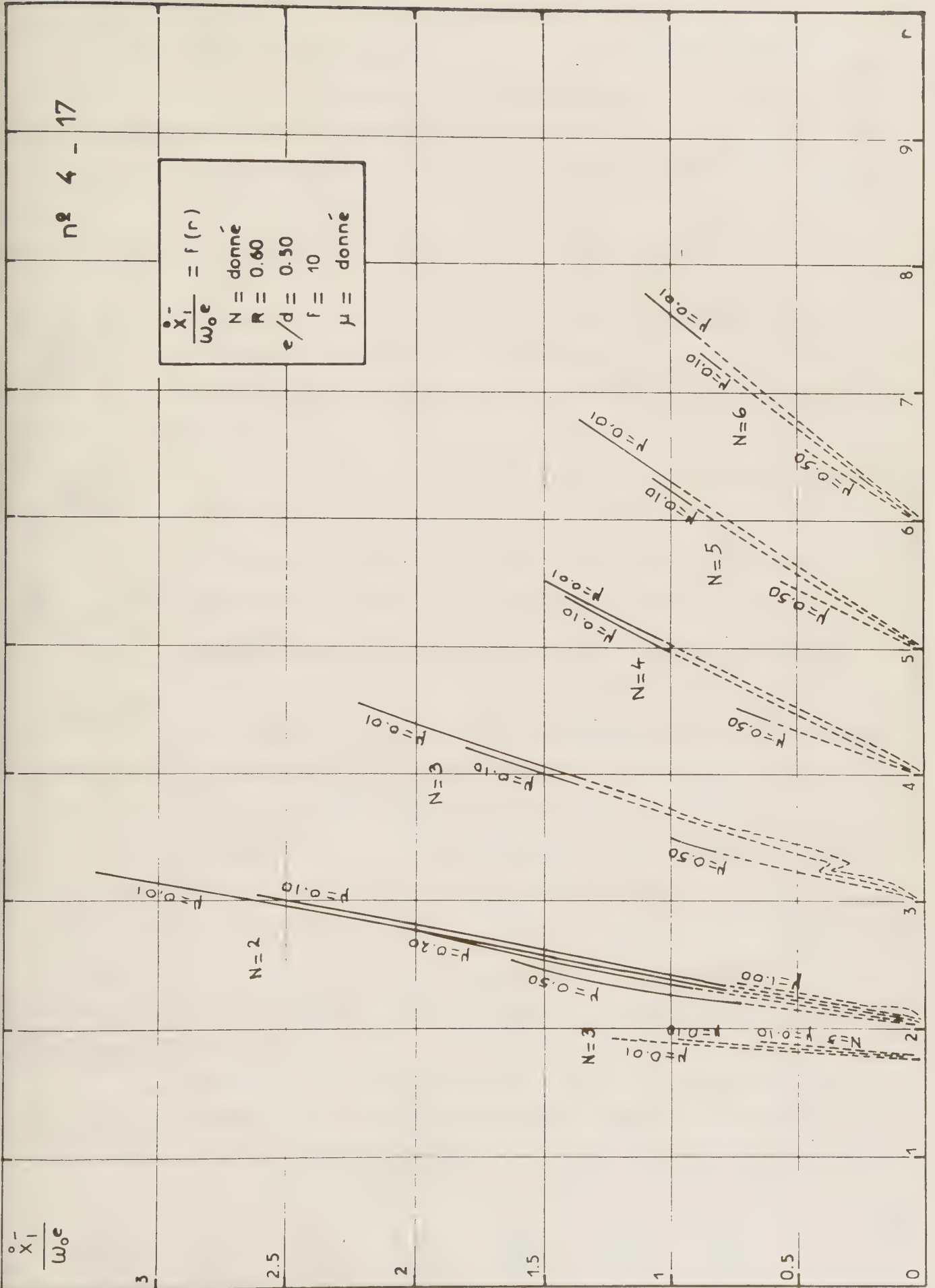
$$e/d = 0.50$$

$$f = 10$$

$$\mu = \text{donné}$$



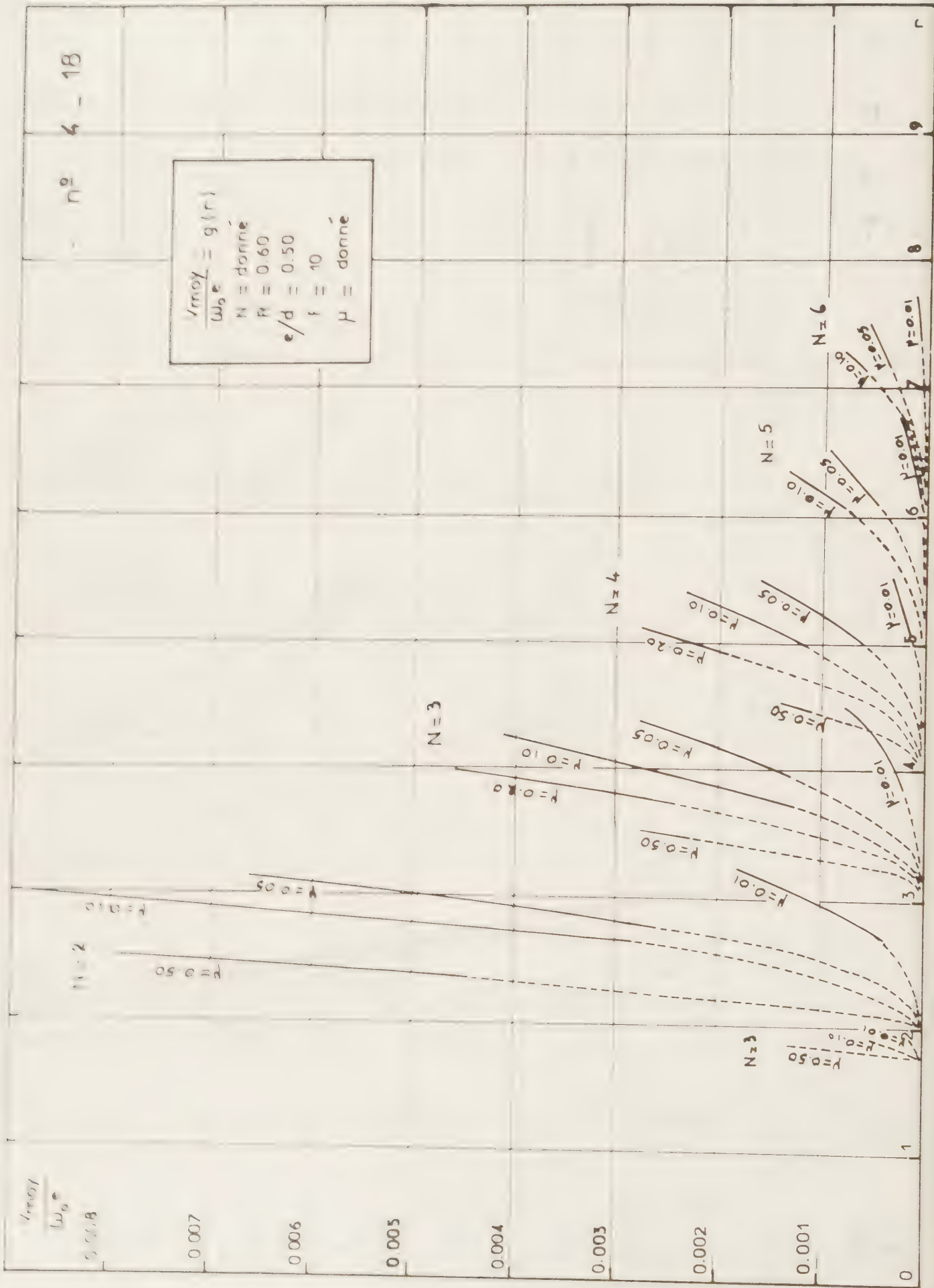
17-4-n



n° 4 - 18

$$\frac{\gamma_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$$

$N = \text{donné}$
 $R = 0.60$
 $e/d = 0.50$
 $f = 10$
 $\mu = \text{donné}$



4.4.4 - Analyse des résultats

De l'étude numérique et du tracé des graphes, nous pouvons dégager un certain nombre de propriétés du système étudié :

- il existe au plus une racine de l'équation $B(T) = 0$, vérifiant toutes les conditions imposées ;
- le phénomène de résonance des systèmes vibrants à un degré de liberté n'existe plus lorsqu'il y a percussion ;
- pour $r = 1$, et pour $\frac{e}{d}$ pas trop grand, le mouvement "régulier" existe toujours. Il est alors stable ;
- pour $N = 1$, le fonctionnement est stable pour r compris entre 0,6 et 2 ;
- pour $N = 1$, les fonctions $\frac{\dot{x}_1^-}{\omega_0 e}$ et $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$ sont minimums au voisinage de $r = 1$;
- le maximum de la vitesse réduite de percussion $\frac{\dot{x}_1^-}{\omega_0 e}$ est une fonction croissante de R ou f , et décroissante de $\frac{e}{d}$ ou μ ;
- le maximum de la vitesse réduite d'enfoncement $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$ est une fonction croissante de R ou μ , et décroissante de $\frac{e}{d}$ ou f ;
- la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu est approximativement proportionnelle à $1/f$;
- seul le cas $N = 1$ existe quand r varie de 1 à 2 ;
- N supérieur à 1 apparaît, pour certaines valeurs de r inférieures à 1 ou supérieures à 2.

4.5 - VARIATION DU MAXIMUM DE LA VITESSE MOYENNE D'ENFONCEMENT EN FONCTION DE L'INTERSTICE REEL -

Les variations de la vitesse moyenne (réduite) d'enfoncement $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$ en fonction des paramètres du système, se déterminent à partir de l'expression :

$$\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = \frac{f\left(\frac{d}{e}\right) - 1}{\mu} \frac{r}{N\pi} T^2$$

Pour N, R, f et μ donnés, le diagramme n°4.6 nous montre que la vitesse réduite $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e}$ est maximum pour $\frac{e}{d} = 0,5$. Il serait erroné d'en déduire que le maximum de V_{moy} est obtenu pour la même valeur de $\frac{e}{d}$.

Pour un système donné et un niveau d'énergie fixé, d et ω_0 sont constants. Le maximum de la vitesse moyenne d'enfoncement, au coefficient constant $\frac{1}{\omega_0 d}$ près, s'écrit, pour chaque valeur de e :

$$\left[\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 d} \right]_{\text{max}} = \frac{e}{d} \left[\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} \right]_{\text{max}}$$

Pour simplifier les calculs, nous prenons d = 1.

Nous pouvons alors tracer le graphe de la fonction $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 d} = h\left(\frac{e}{d}\right)$, pour N, R, f et μ donnés (diagrammes n°4.19, n°4.20, n°4.21). Notons que $\frac{e}{d}$ est compris entre 0 et f. Nous constatons que le maximum de la vitesse moyenne d'enfoncement est une fonction croissante de e/d,

Remarquons que lorsque $\frac{e}{d}$ se rapproche de la valeur de f, la condition "la force F est toujours supérieure à toute force exercée par le ressort" risque de ne plus être vérifiée (cf. paragraphe 1.8.3.2).

Nous constatons à nouveau que la vitesse moyenne d'enfoncement est une fonction décroissante de f, et une fonction croissante de μ et de R.

En conclusion, pour un système donné, possédant un niveau d'énergie constant, le réglage optimum conduisant au maximum de la vitesse moyenne d'enfoncement, implique :

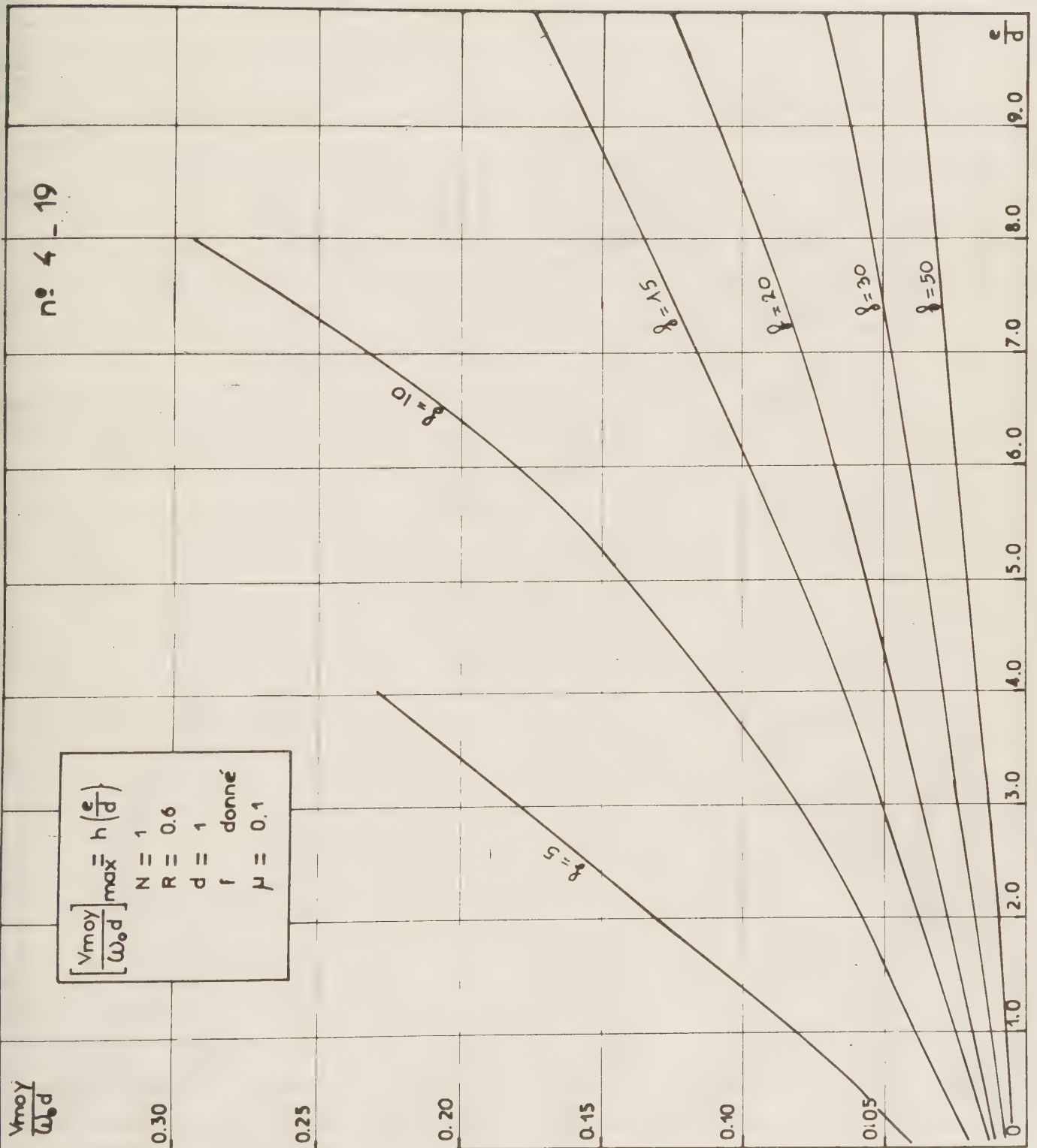
- la connaissance du coefficient de restitution de vitesse R qui dépend notamment de la nature des matériaux constituant le percuteur et le pieu;

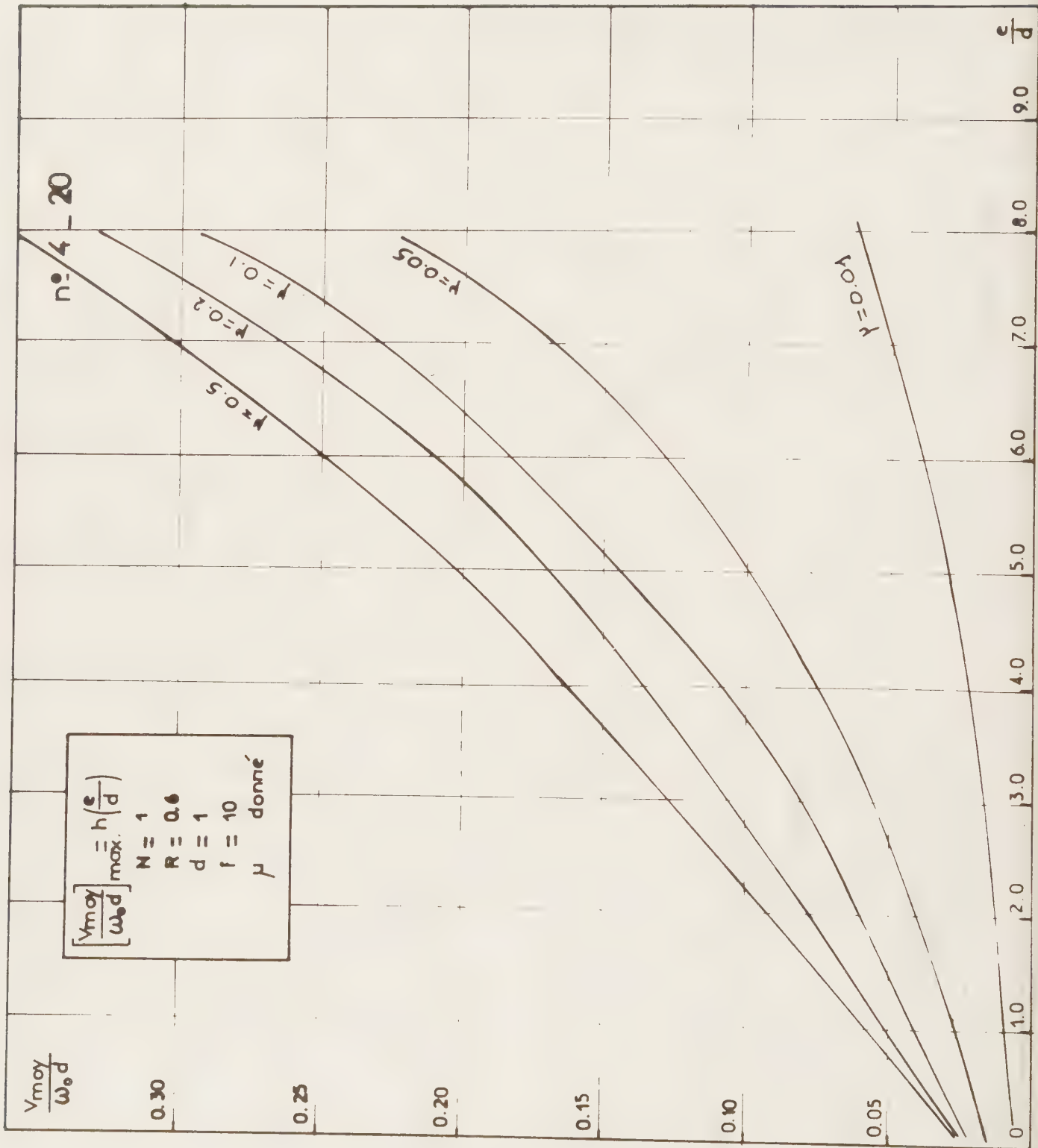
- la connaissance du rapport μ des masses du percuteur et de l'ensemble (pieu + bâti) ;

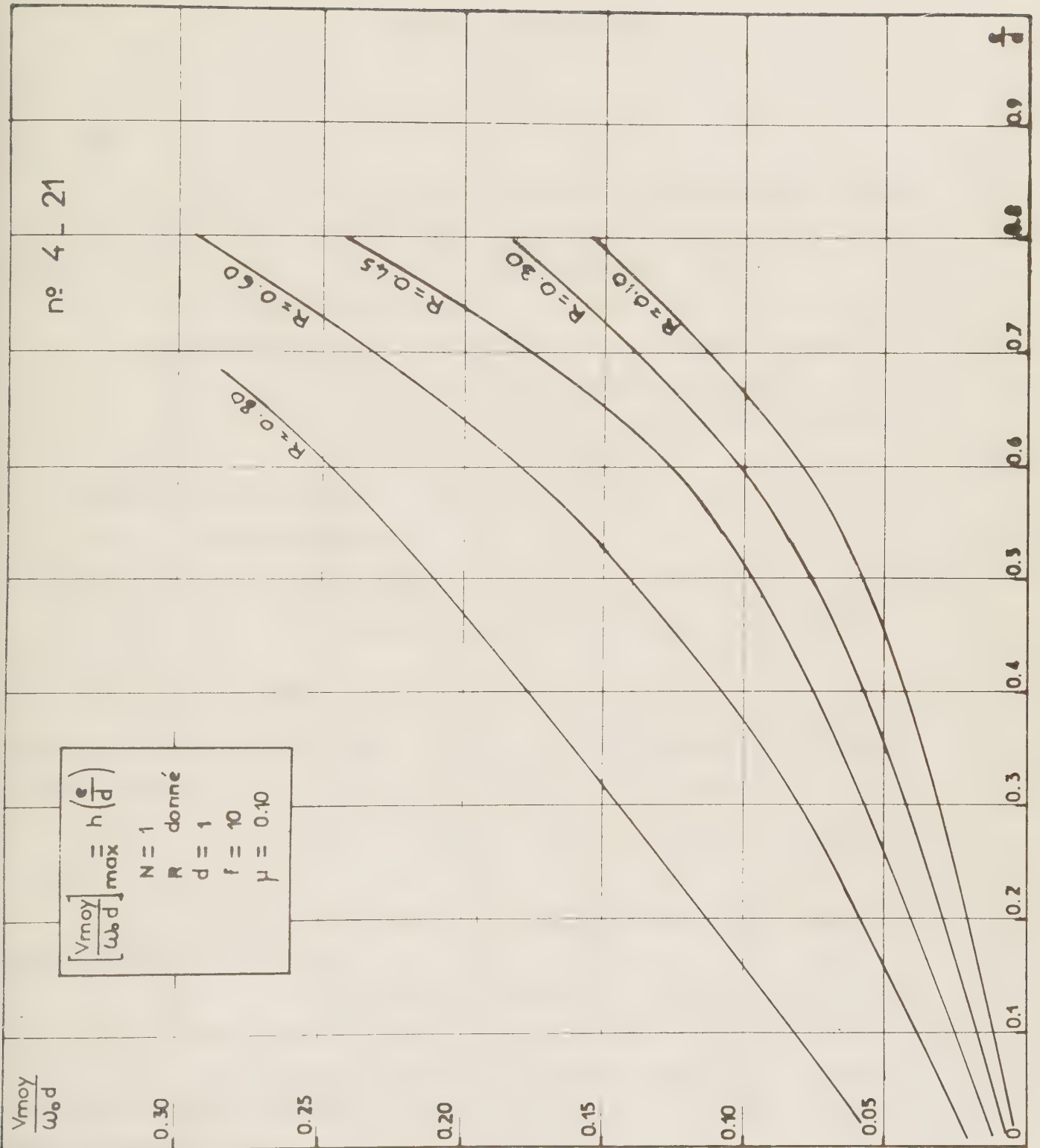
- la connaissance du frottement qu'exerce le sol sur le pieu ;

- le choix de l'interstice e d'après le graphe de la fonction $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 d} = h\left(\frac{e}{d}\right)$, et les caractéristiques mécaniques du système ;

- la détermination de la fréquence d'excitation f_m telle que $r_m = f_m \times \frac{2\pi}{\omega}$, r_m étant l'abscisse, sur le graphe de la fonction $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$, du maximum de la vitesse moyenne (réduite) d'enfoncement.







Chapitre 5

DISPOSITIF EXPERIMENTAL

5.1 - BUT

Le dispositif expérimental doit permettre la vérification des théories exposées aux chapitres précédents. Pour répondre à ce but, il devra satisfaire, aussi parfaitement que possible, aux conditions suivantes :

- vérification des hypothèses
- réglage aisé et précis, dans une plage suffisamment étendue, d'un certain nombre de paramètres (notamment r et $\frac{e}{d}$)
- maximum de sensibilité et de précision des appareils de mesure.

5.2 - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

5.2.1 - Montage mécanique

5.2.1.1 - Description

Le montage mécanique, représenté sur les figures 5.1 et 5.2, se compose :

- d'une structure rigide formée de 2 profilés (1) en duralumin reliant un bloc d'acier (2) au pot de l'excitateur (3). Le bloc d'acier supporte les pots du capteur-vitesse (4) et du capteur-déplacement ;
- d'une butée cylindrique (5), en acier, encastrée dans le bloc (2) ;
- d'un chariot (6) pouvant glisser longitudinalement sur le profilé inférieur (1) ;
- d'un percuteur (7) encastré dans une masse (8) en laiton ;
- de 4 lames (9) identiques, parallèles, en acier à ressort, encastrées à une extrémité sur la masse (8) et à l'autre extrémité sur le chariot (6) ;
- d'une bobine d'excitation (10) solidaire de la masse (8) et pénétrant partiellement dans le pot de l'excitateur (3) ;
- de 2 porte-patins (11) fixés sur le profilé inférieur (1) ;

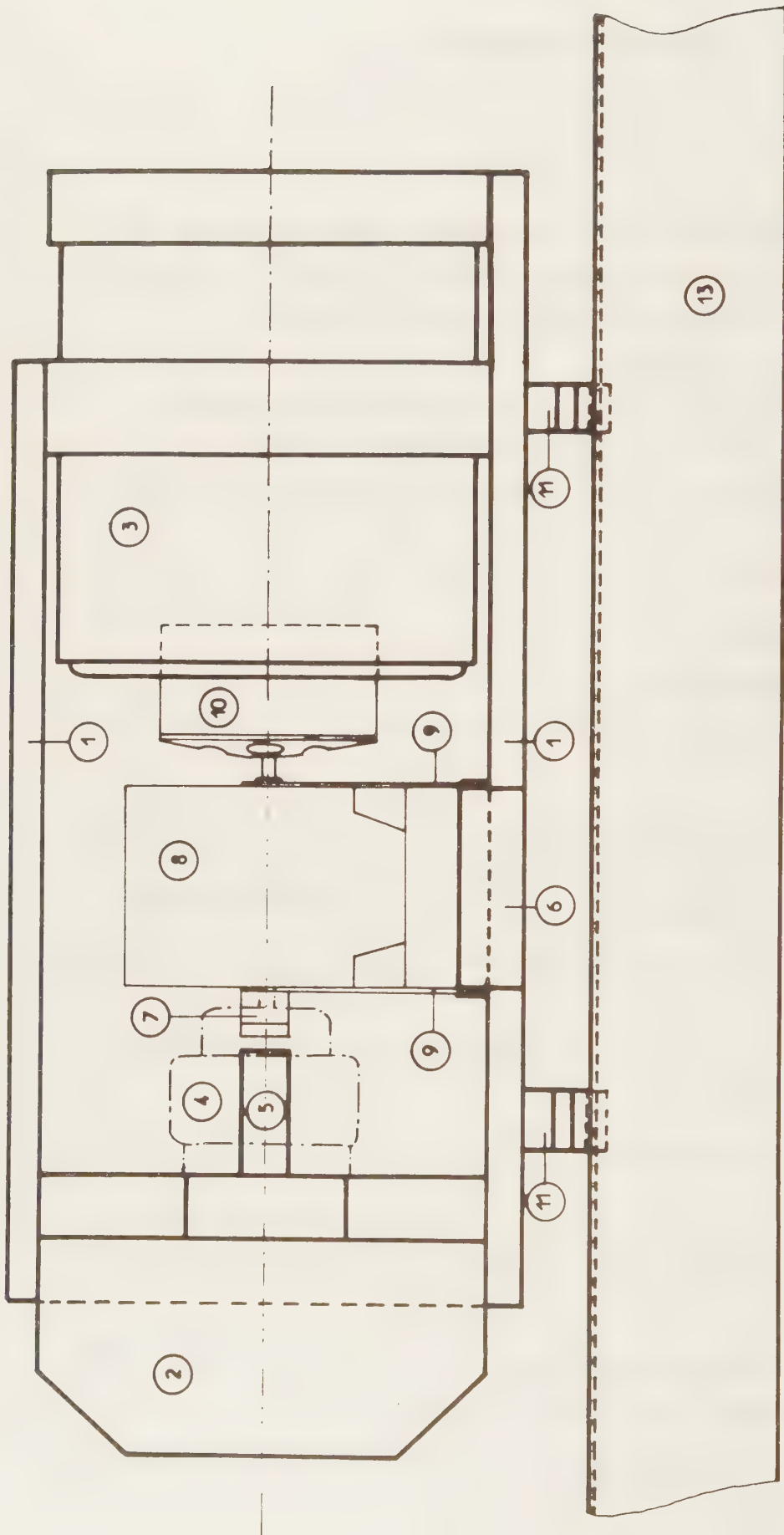


Fig. 5.1

- de 4 patins (12) en hêtre, poncés et collés sur les porte-patins (11) ;

- d'un rail (13) constitué d'un profilé en U, horizontal, aux ailes usinées suivant deux surfaces inclinées pour assurer un meilleur guidage. Les surfaces de contact patins-profilé schématisent le contact pieu-sol.

5.2.1.2 - Caractéristiques techniques

- Les 2 profilés (1) sont en duralumin afin que la structure ne constitue pas un circuit magnétique fermé. De même, la masse (8) est en laiton pour ne subir aucune influence magnétique de la part du pot de l'excitateur.

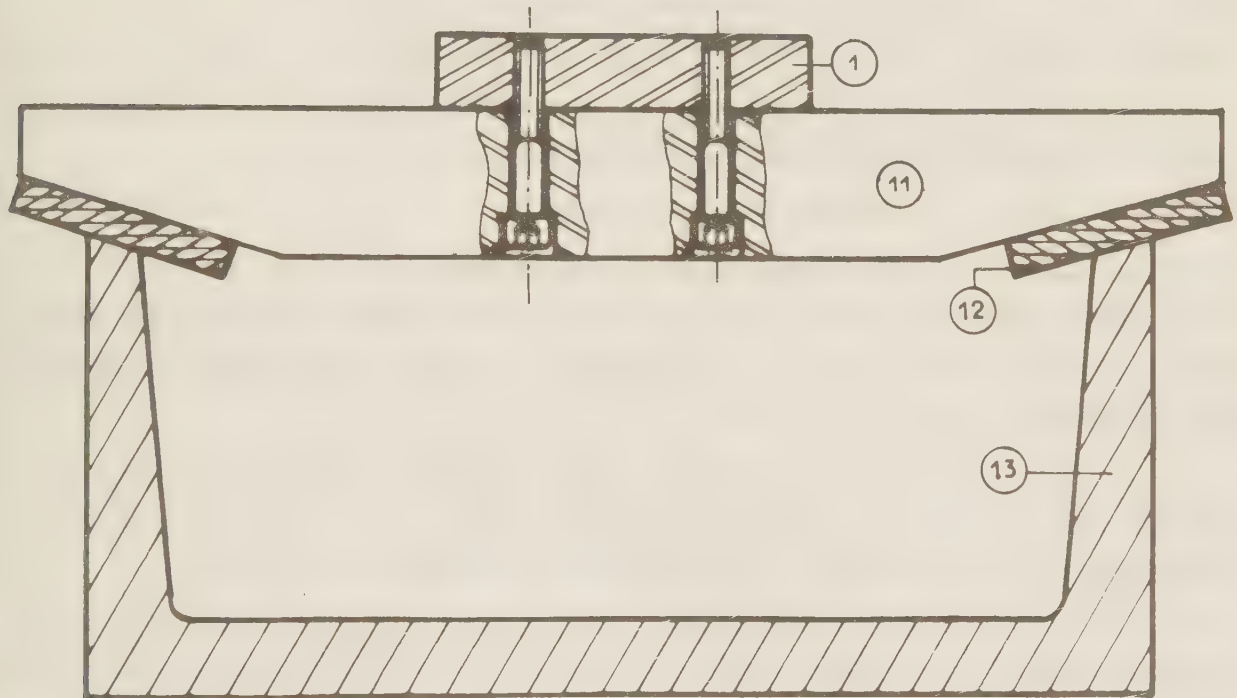


Fig. 5.2

- Réglage de l'interstice e :

Le chariot (6) peut glisser sur le profilé (1) pour permettre le réglage de l'interstice e. Après positionnement, il est rendu solidaire du profilé (1) par 2 vis.

- Position des différents axes :

Les axes de la butée, du percuteur, de la bobine et du pot de l'excitateur sont confondus et parallèles au plan de base du profilé.

Les axes du percuteur, du capteur vitesse et du capteur déplacement sont parallèles entre eux, et sont dans un plan parallèle au plan de base du profilé.

- Déplacement du percuteur :

Le principe des 2 paires de lames parallèles encastrées à chaque extrémité assure un déplacement axial du percuteur (figure 5.3).

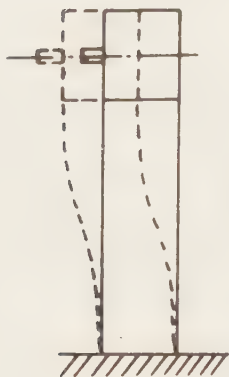


Fig. 5.3

5.2.2 - Circuit d'excitation

5.2.2.1 - Principe de l'excitateur

L'excitateur est constitué par une bobine (10) dont un certain nombre de spires se trouve dans le champ d'un aimant permanent, le flux de ce dernier étant canalisé par une armature en fer doux. L'ensemble aimant-armature constitue le pot d'excitation (3).

Quand la bobine est parcourue par un courant sinusoïdal, d'amplitude I , la force développée par l'excitateur est sinusoïdale, de même pulsation ω que le courant, et d'amplitude E proportionnelle à I .

$$E = K_1 I$$

avec K_1 constant

Ainsi, pour appliquer une force d'amplitude constante au système vibrant, il suffit de maintenir un courant excitateur d'amplitude constante, quelle que soit la pulsation ω de celui-ci.

Un étalonnage préalable permet de déterminer la valeur du coefficient K_1 .

5.2.2.2 - Circuit d'excitation (figure 5.4)

Le circuit d'excitation comprend :

- un générateur de signaux sinusoïdaux de fréquence variable (PHILIPS)

- un amplificateur de puissance (PRODERA 20 WA 50/DA)
- une bobine d'excitation (type PRODERA)
- un périodemètre (ROCHAR A1211)
- un voltmètre électronique (PHILIPS GM 6012)

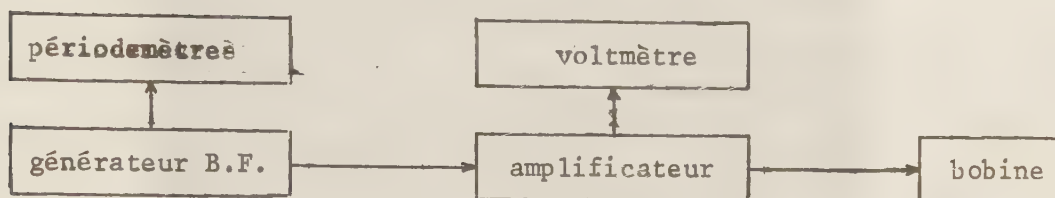


Fig. 5.4

Le voltmètre électronique, branché sur la sortie spécifique de l'amplificateur, permet de connaître l'intensité efficace du courant parcourant la bobine excitatrice.

Le périodemètre permet la mesure précise de la période de l'excitation.

L'amplificateur de puissance augmente le niveau de sortie du générateur et débite un courant réglable, mais d'amplitude constante quelle que soit la fréquence du signal émis.

5.2.3 - Circuit de mesure de la vitesse

5.2.3.1 - Principe du capteur-vitesse

La conception du capteur vitesse est analogue à celle de l'excitateur. La variation du flux, lors du mouvement, crée une différence de potentiel V aux bornes de la bobine, proportionnelle à la vitesse instantanée v de celle-ci.

$$v = K_2 V$$

avec K_2 constant

Un étalonnage préalable détermine la valeur du coefficient K_2 . Il suffit ensuite de connaître V pour en déduire, à chaque instant, la vitesse relative du percuteur.

5.2.3.2 - Perturbation du signal vitesse

L'étude théorique met en évidence que la vitesse du percuteur, entre deux percussions consécutives, est la superposition de deux sinusoïdes de pulsations respectives ω_0 et ω . Or, si nous regardons le signal

de vitesse obtenu sur un écran d'oscilloscope (photo 5.1), nous constatons la superposition aux deux sinusoïdes précédemment citées, d'une perturbation de forme sinusoïdale amortie, particulièrement importante après chaque percussion.

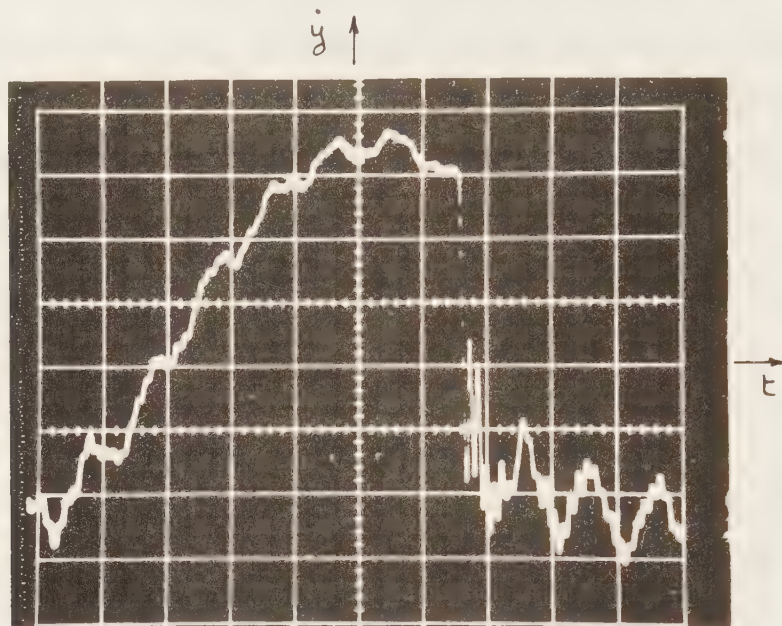


Photo 5.1

Cette différence entre les signaux de vitesse théorique et expérimental s'explique aisément : une percussion excite toute la structure à sa fréquence propre ; les vibrations qui en résultent sont plus ou moins importantes selon l'intensité du choc, les raideurs et l'importance des masses excitées, l'emplacement de la percussion, etc...

C'est pour cette raison que nous avons monté la butée (5) et la cage du capteur-vitesse (4) sur un bloc massif (2) en acier, pour éliminer une source de vibrations parasites.

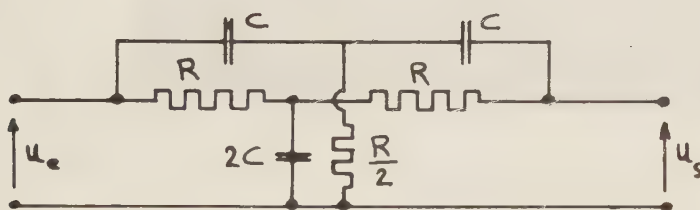
Sur la photo 5.1 subsistent néanmoins deux vibrations parasites, l'une de période égale à $6,2 \cdot 10^{-4}$ s, soit une fréquence égale à 1610 Hz, et une période égale à $5,0 \cdot 10^{-3}$ s, soit une fréquence de 200 Hz.

Celle de 1610 Hz peut provenir des lames doublement encastrées. Elle se transmet à la bobine du capteur vitesse qui est montée sur la masse (8). Nous pouvons constater qu'elle est suffisamment amortie avant une nouvelle percussion et qu'elle n'affecte pas la mesure de $\dot{x}_1^-$.

5.2.3.3 - Elimination de la perturbation

L'élimination du signal parasite de fréquence 200 Hz ne sera pas faite, car cette fréquence est trop proche des fréquences de l'excitation. Nous ne pouvons construire un filtre tel que son gain soit voisin de l'unité pour les fréquences utilisées.

Par contre, pour le signal parasite de fréquence 1610 Hz, l'élimination peut être réalisée à l'aide d'un filtre en double T ponté (figure 5.5).



C : capacité
R : résistance
 u_e : tension d'entrée
 u_s : tension de sortie

Fig. 5.5

La fréquence théorique de coupure d'un tel filtre est :

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Connaissant la fréquence des vibrations parasites à annuler, il est aisé d'en déduire le produit RC.

Le gain s'exprime par :

$$K = \left| \frac{u_e}{u_s} \right| = \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2}{\sqrt{1 + 14 R^2 C^2 \omega^2 + R^4 C^4 \omega^4}}$$

et le déphasage entre les tensions d'entrée et de sortie par :

$$\theta = - \text{Arc tg} \frac{4RC\omega}{1 - R^2 C^2 \omega^2}$$

Les diagrammes n°5.1 et 5.2 représentent respectivement les variations expérimentales de K et θ en fonction de la fréquence f du signal d'entrée, pour :

$$f_c = 1587 \text{ Hz} \quad \text{avec } R = 1000 \, \Omega$$

$$\text{et } C = 0,1 \, \mu\text{F}$$

Le gain K peut être considéré comme constant pour les fréquences inférieures à 70 Hz (soit $r = 4,20$), ce qui définit le domaine de validité du balayage en fréquence.

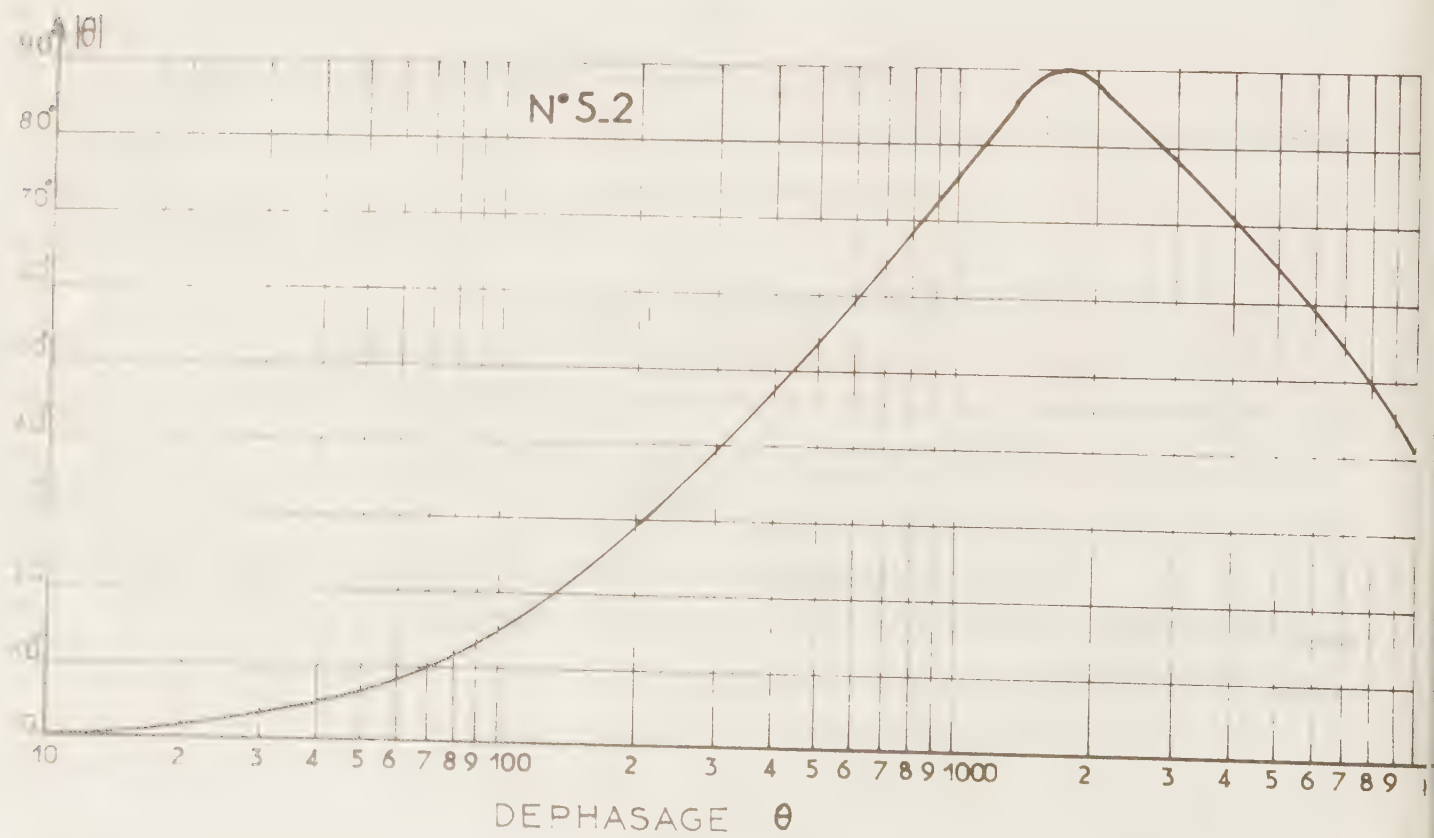
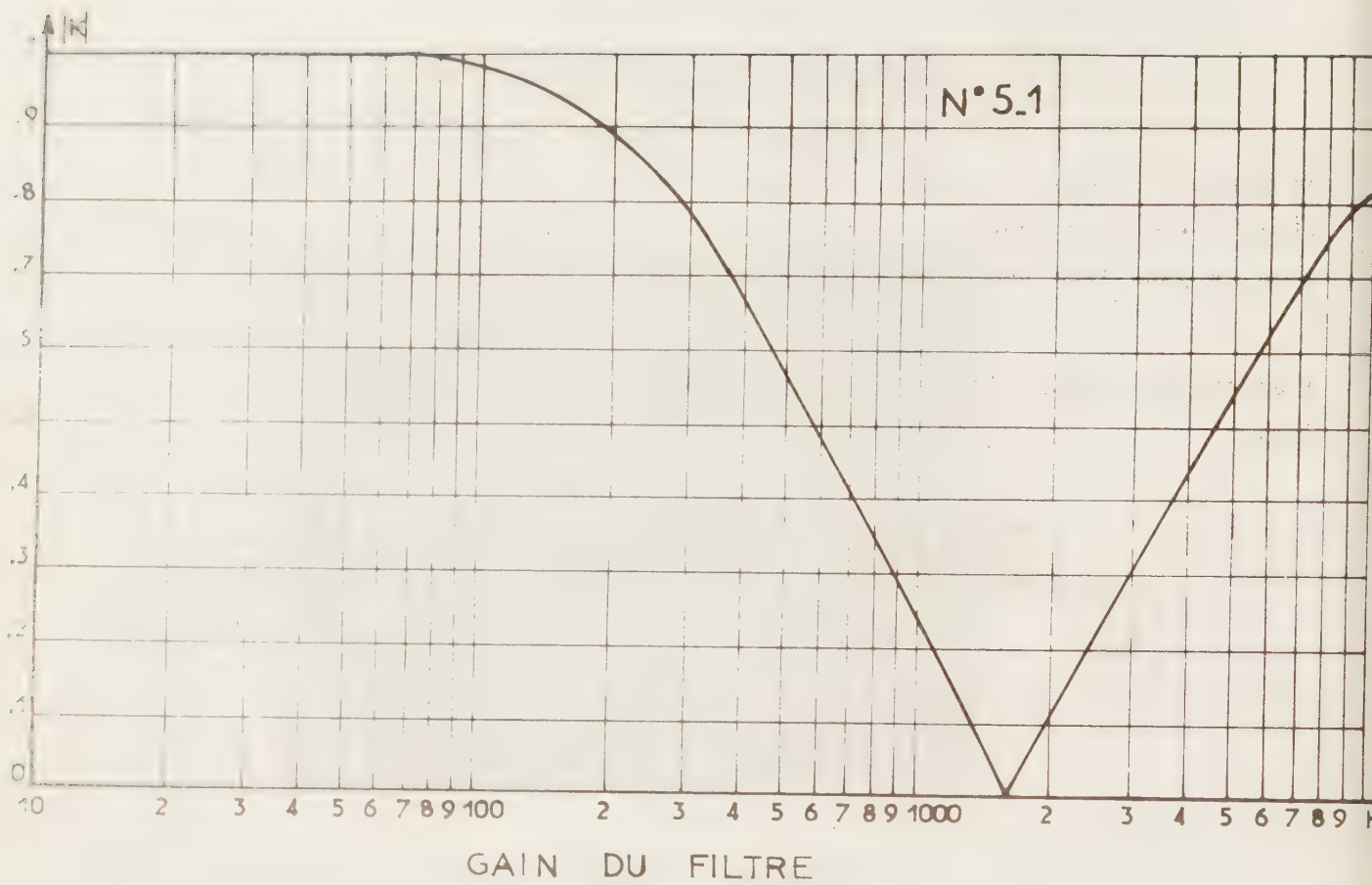




Photo 5.2 : Signal vitesse non filtré



Photo 5.3 : Signal vitesse filtré

Par contre, le déphasage θ entraîne une erreur non négligeable sur le signal vitesse dès que ω est supérieur à 200 rd/s. Nous n'aurons pas de mesure de la vitesse à faire au-delà de cette valeur.

Les photos 5.2 et 5.3 illustrent l'efficacité du filtre en double T.

5.2.3.4 - Circuit de mesure de la vitesse

Le circuit de mesure de la vitesse (figure 5.6) comporte :

- un capteur de vitesse (PRODERA - type 20 M 11/B n°207)
- un filtre en double T, éventuellement
- un oscilloscope (TEKTRONIX - Dual Beam 502-A) équipé d'un appareil photo POLAROÏD
- un voltmètre électronique (PHILIPS GM 6012), éventuellement.

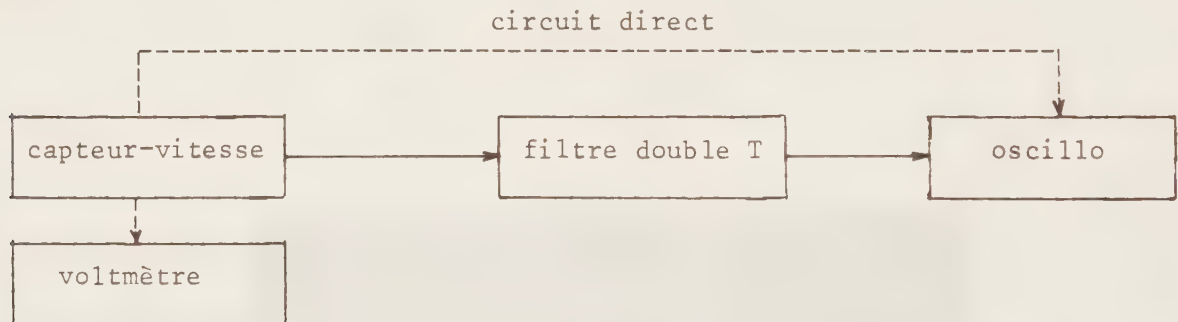


Fig. 5.6

5.2.4 - Circuit de mesure du déplacement

5.2.4.1 - Principe du capteur-déplacement

Le déplacement du percuteur est mesuré à l'aide d'un capteur-déplacement associé à un pont de mesure. Il est constitué par une sonde explorant un réseau uniforme de surfaces équipotentielles dans une solution. Il convertit directement les vibrations mécaniques en tensions électriques V proportionnelles aux déplacements x .

$$x = K_3 V \quad \text{avec } K_3 \text{ constant}$$

Un étalonnage préalable détermine la valeur du coefficient K_3 . Il suffit ensuite de connaître V pour en déduire, à chaque instant, le déplacement relatif du percuteur.

5.2.4.2 - Circuit de mesure du déplacement

Le circuit de mesure du déplacement (figure 5.7) comporte :

- un capteur-déplacement (PHILIPS PR 9314)
- un pont de mesure (PHILIPS PR 9300)
- un oscilloscope (TEKTRONIX - Dual Beam 502-A)
- un voltmètre électronique (PHILIPS GM 6012), éventuellement.

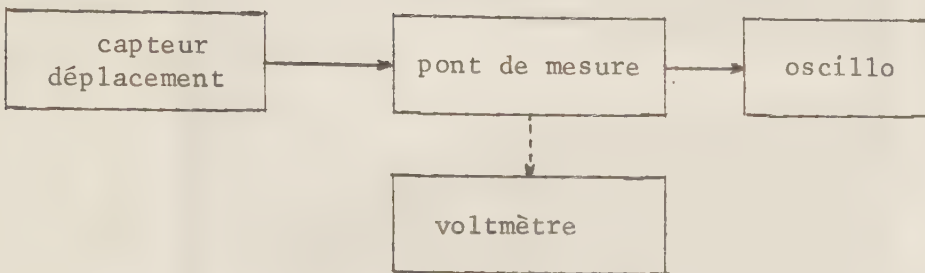


Fig. 5.7

5.3 - VERIFICATION DES HYPOTHESES -

L'étude théorique est basée sur certaines hypothèses énoncées au paragraphe 1.1. Analysons chacune de ces hypothèses pour savoir si elle est vérifiée par notre dispositif expérimental.

5.3.1 - Le système n'est pas amorti

Tout système mécanique soumis à un mouvement vibratoire est plus ou moins amorti. Pour mettre en évidence cet amortissement, opérons comme suit : le système vibrant est déplacé de sa position d'équilibre, puis lâché sans vitesse initiale ; le mouvement sinusoïdal amorti est enregistré (Photos 5.4 et 5.5).

5.3.1.1 - Mesure de l'amortissement

Les forces d'amortissement sont supposées proportionnelles à la vitesse de la masse m_1 , soit $b\dot{x}_1$. Nous allons mesurer le coefficient d'amortissement défini par :

$$\varepsilon = \frac{b}{2m_1\omega_0}$$

Nous retiendrons les 2 méthodes suivantes :

1ère méthode (figure 5.8) :

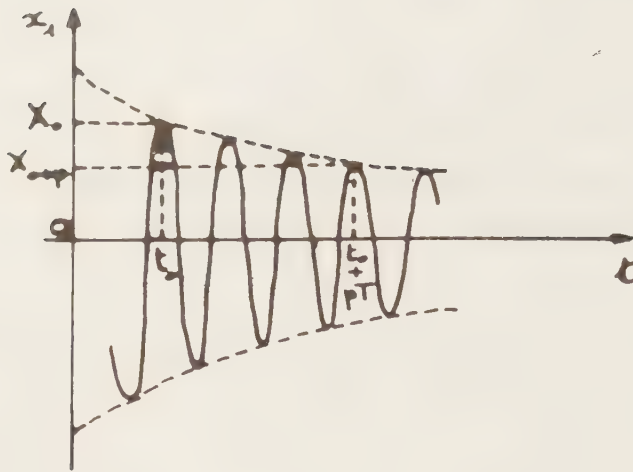


Fig. 5.8

Appelons X_0 et X_{o+p} deux amplitudes, l'une X_0 , servant de référence, l'autre X_{o+p} , obtenue au bout de p oscillations.

Le temps écoulé pour que l'amplitude passe de X_0 à X_{o+p} est égal à p fois la pseudo-période T . Le coefficient ε est donné par la relation :

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0 p T} \text{Log} \frac{X_0}{X_{o+p}}$$

Sur les photos, nous pouvons évaluer X_0 , X_{o+p} , pT .
Connaissant la pulsation propre du système, nous pouvons en déduire ε .

2ème méthode (valable si $\varepsilon < 10^{-2}$) (figure 5.9) :

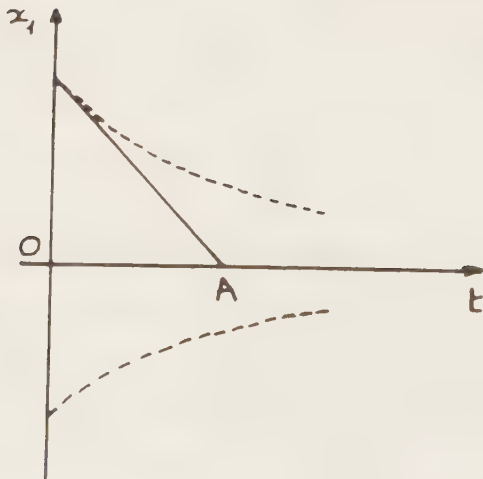


Fig. 5.9

Considérons la tangente à l'une des courbes enveloppes du mouvement au point d'abscisse $t = 0$.

Elle coupe l'axe des temps au point A, qui correspond au temps $T' = \overline{OA}$.

Le coefficient ε est donné par la relation :

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0 T'}$$

Nous pouvons évaluer T' et en déduire ε .

5.3.1.2 - Résultats

1ère méthode : $\varepsilon = 0,99 \%$

2ème méthode : $\varepsilon = 1,10 \%$

Le coefficient d'amortissement est de l'ordre de 1 %.
L'amortissement est très faible ; nous pouvons le négliger en première approximation.

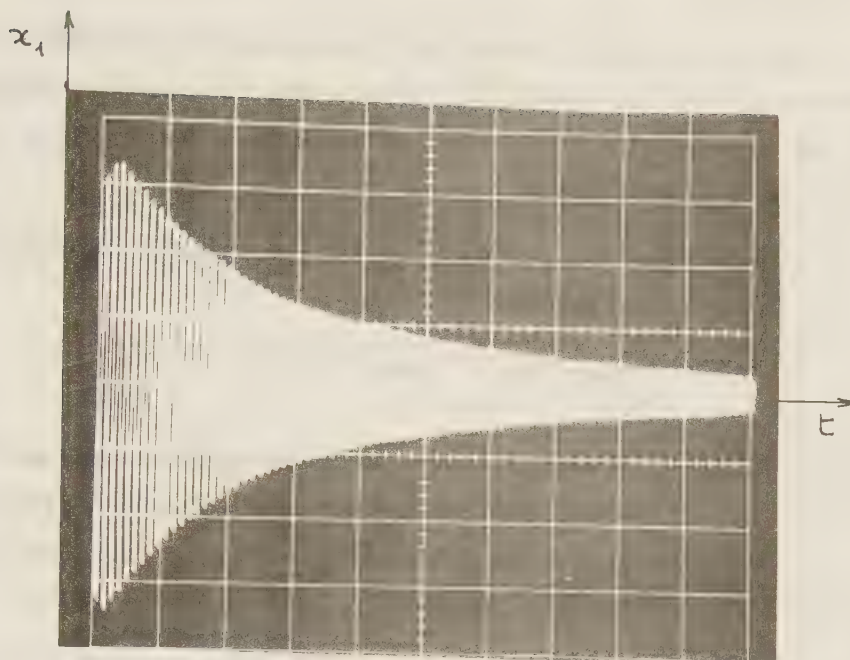


Photo 5.4 : Echelle des temps : 1 cm = 0,5 s

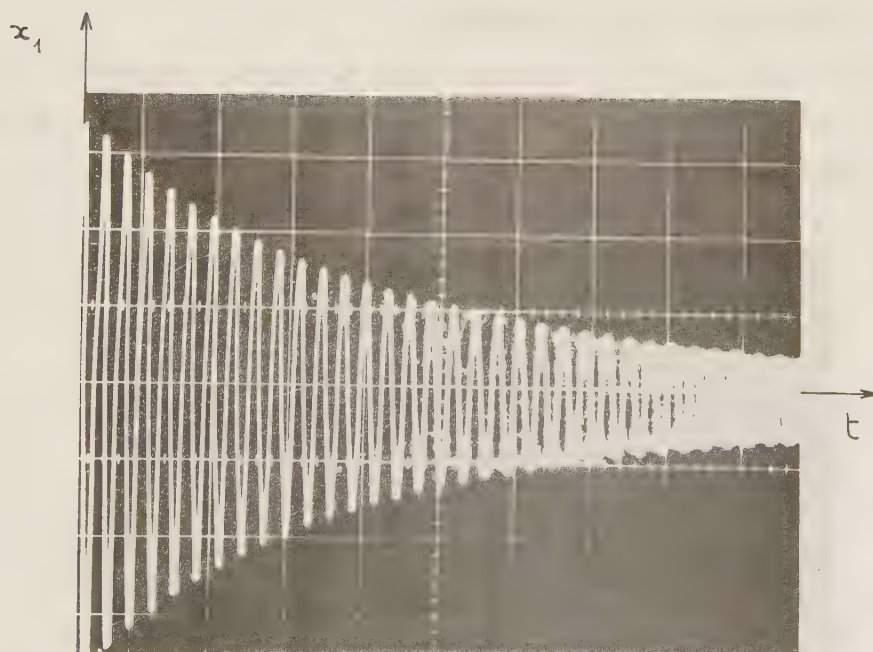


Photo 5.5 : Echelle des temps : 1 cm = 0,2 s

5.3.2 - Le ressort de raideur k est parfaitement linéaire et de masse négligeable

La masse de chaque ressort est très petite comparée à la masse percutante (rapport voisin de $2,7 \cdot 10^{-3}$). Elle a une très faible influence sur le comportement du système. Nous en tiendrons cependant compte dans la détermination de la pulsation propre ω_0 .

En régime forcé sinusoïdal, un système vibrant linéaire a un déplacement x vérifiant la relation :

$$x = \frac{d}{1-r^2} \cos \omega t \quad \text{avec} \quad d = \frac{E}{k}$$

Soit I_1 et I_2 les amplitudes de 2 courants traversant la bobine d'excitation et soit x_1 et x_2 les amplitudes des déplacements correspondants du percuteur, pour une même fréquence d'excitation. Nous contrôlons que courants et déplacements sont proportionnels :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

et ceci quelles que soient les valeurs de I et de r .

Notre système est bien linéaire, en dehors des percussions.

5.3.3 - La percussion est instantanée

Examinons la photo 5.6, montrant le signal vitesse : la variation de vitesse est brusque au moment de la percussion. Nous pouvons considérer celle-ci comme instantanée.

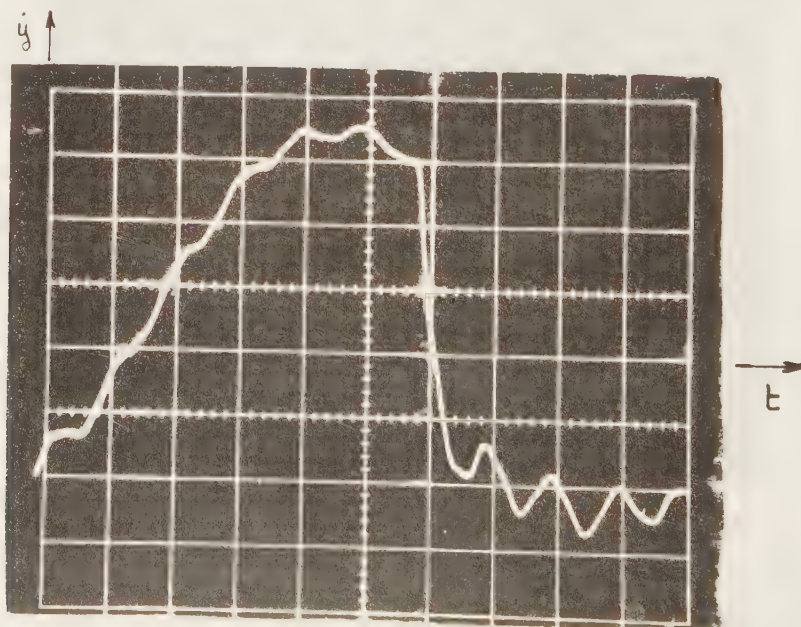


Photo 5.6

5.3.4 - La durée de glissement du pieu est très petite devant la période du phénomène ($\Delta t \ll T$)

Cette condition est assez bien vérifiée. Sur la photo 5.6, nous constatons que le rapport $\frac{\Delta t}{T}$ est voisin de 6 %.

Mais nous avons pu effectuer des réglages pour lesquels le système glisse continuellement sur le rail. Nous ne nous placerons évidemment pas dans ces conditions de réglage.

5.3.5 - La force F est supérieure à toute force exercée par le ressort

Cette condition est parfaitement vérifiée en général. Toutefois, pour des réglages très particuliers, nous avons pu constater des oscillations du système pieu + bâti, et même des déplacements vers les x_2 négatifs.

5.3.6 - Le pieu est fixe entre deux percussions consécutives

En dehors de la durée de glissement Δt , courte, et en excluant les cas très particuliers signalés dans les deux paragraphes précédents, cette condition est parfaitement réalisée.

5.3.7 - Le mouvement du percuteur est continu

La quantité x_2 variant de Δx_2 , très petit, pendant le temps Δt , les variations de $y = x_1 - x_2$ et de x_1 sont pratiquement les mêmes au cours de la percussion.

La photo 5.7 représente la vitesse relative $\dot{y}$ et le déplacement relatif y en fonction du temps. Au moment du choc, nous ne constatons pas de discontinuité sur y . En dehors du choc, y est donc continu et le pieu reste fixe. L'hypothèse est bien vérifiée.

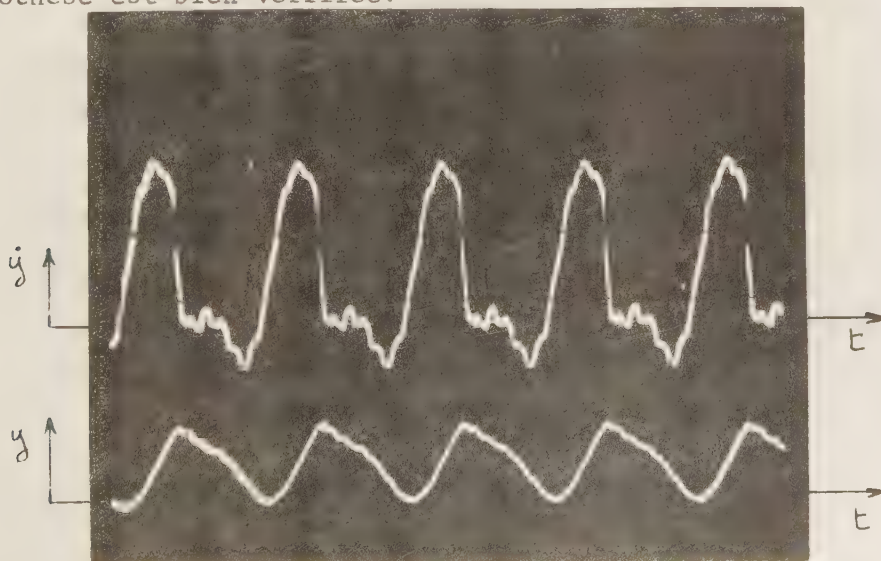


Photo 5.7

5.3.8 - La force de frottement est indépendante de la vitesse de l'enfoncement

La vitesse "instantanée" d'enfoncement reste faible. Nous avons cherché un matériau dont le coefficient de frottement au contact de l'acier varie peu en fonction de la vitesse de glissement. Le bois répond à cette condition (le freinage d'une charrette est assuré par un patin en bois ; pour une pression donnée sur le cercle de la roue, le freinage demeure progressif). Les patins de notre montage sont en hêtre (bois autrefois utilisé pour le freinage du métro).

5.4 - REGLAGES ET MESURES

5.4.1 - Mesure de la pulsation propre ω_0 du système

Le système étant très faiblement amorti, la période propre se déduit de l'étude de la résonance. La lecture du périodemètre nous fournit la valeur :

$$T_0 = 60,12 \pm 0,02 \text{ ms}$$

La pulsation propre est donnée par la relation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Soit : $\omega_0 = 104,51 \text{ rd/s}$ $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = 3,3 \cdot 10^{-4}$

5.4.2 - Mesure des masses

5.4.2.1 - Masse m_1 du percuteur

La masse du percuteur est obtenue par pesée, soit 3341 g. Nous y ajoutons entre le tiers et la moitié de la masse des lames de ressort.

Chaque lame a pour masse 9,0 g. Nous ajoutons ainsi à la masse du percuteur entre $\frac{4 \times 9}{3} = 12 \text{ g}$ et $\frac{4 \times 9}{2} = 18 \text{ g}$.

Nous adoptons pour m_1 la valeur suivante :

$$m_1 = 3356 \text{ g} \quad \frac{\Delta m_1}{m_1} = 9 \cdot 10^{-4}$$

5.4.2.2 - Masse m_2 du système pieu + bâti

La masse totale du système schématisé à la figure 5.1 est 22010 g.

Pour obtenir la masse m_2 , nous retranchons de la masse totale, la masse m_1 ; nous obtenons ainsi :

$$m_2 = 18\,650\text{ g}$$

$$\frac{\Delta m_2}{m_2} = 11 \times 10^{-4}$$

5.4.2.3 - Coefficient sans dimension μ

Il est défini par la relation $\mu = \frac{m_1}{m_2}$, soit

$$\mu = 0,1800$$

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} = 2.10^{-3}$$

5.4.3 - Mesure de la raideur k du ressort

La raideur k du ressort se déduit de la mesure de T_0 et de m_1 , suivant la relation :

$$k = \frac{4\pi^2 m_1}{T_0^2}$$

soit

$$k = 36\,660\text{ N/m}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = 1,6.10^{-3}$$

5.4.4 - Mesure du déplacement relatif y du percuteur

5.4.4.1 - Etalonnage du capteur-déplacement

Le chariot (6) est placé de telle façon que le percuteur (7) puisse se déplacer d'environ 3 mm de chaque côté de sa position d'équilibre (pour laquelle le pont est équilibré). Nous appliquons alors des cales étalon contre la butée et, manuellement, amenons le percuteur en contact avec les cales. Nous lisons alors la tension obtenue. Les résultats sont rassemblés sur le diagramme n°5.1.

Nous obtenons une variation linéaire entre tension et déplacement ; le coefficient de proportionnalité est :

$$K_3 = 3,50\text{ mm/V}$$

$$\frac{\Delta K_3}{K_3} < 5.10^{-3}$$

5.4.4.2 - Réglage et mesure de l'interstice e

L'interstice e est réglé à l'aide de cales étalon. Dans la position d'équilibre du percuteur, le pont est équilibré. La mesure précise de e est faite en amenant le percuteur au contact de la butée (soit manuellement, soit au cours d'un choc), et en mesurant la tension correspondante.

5.4.5 - Réglage et mesure de l'excitation

5.4.5.1 - Etalonnage de l'excitateur

L'étalonnage de l'excitateur est effectué en mesurant l'amplitude des oscillations sinusoïdales forcées, sans percussion (diagramme n°5.2). Connaissant la raideur k du ressort, nous pouvons en déduire le coefficient de proportionnalité entre l'intensité du courant traversant la bobine et l'amplitude de la force d'excitation :

$$\boxed{K_1 = 41,60 \text{ N/A}} \quad \frac{\Delta K_1}{K_1} < 7.10^{-3}$$

5.4.5.2 - Réglage de E

Le réglage de E est obtenu en faisant varier le gain de l'amplificateur de puissance.

5.4.5.3 - Réglage de r

$$\text{Nous avons : } r = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{T}$$

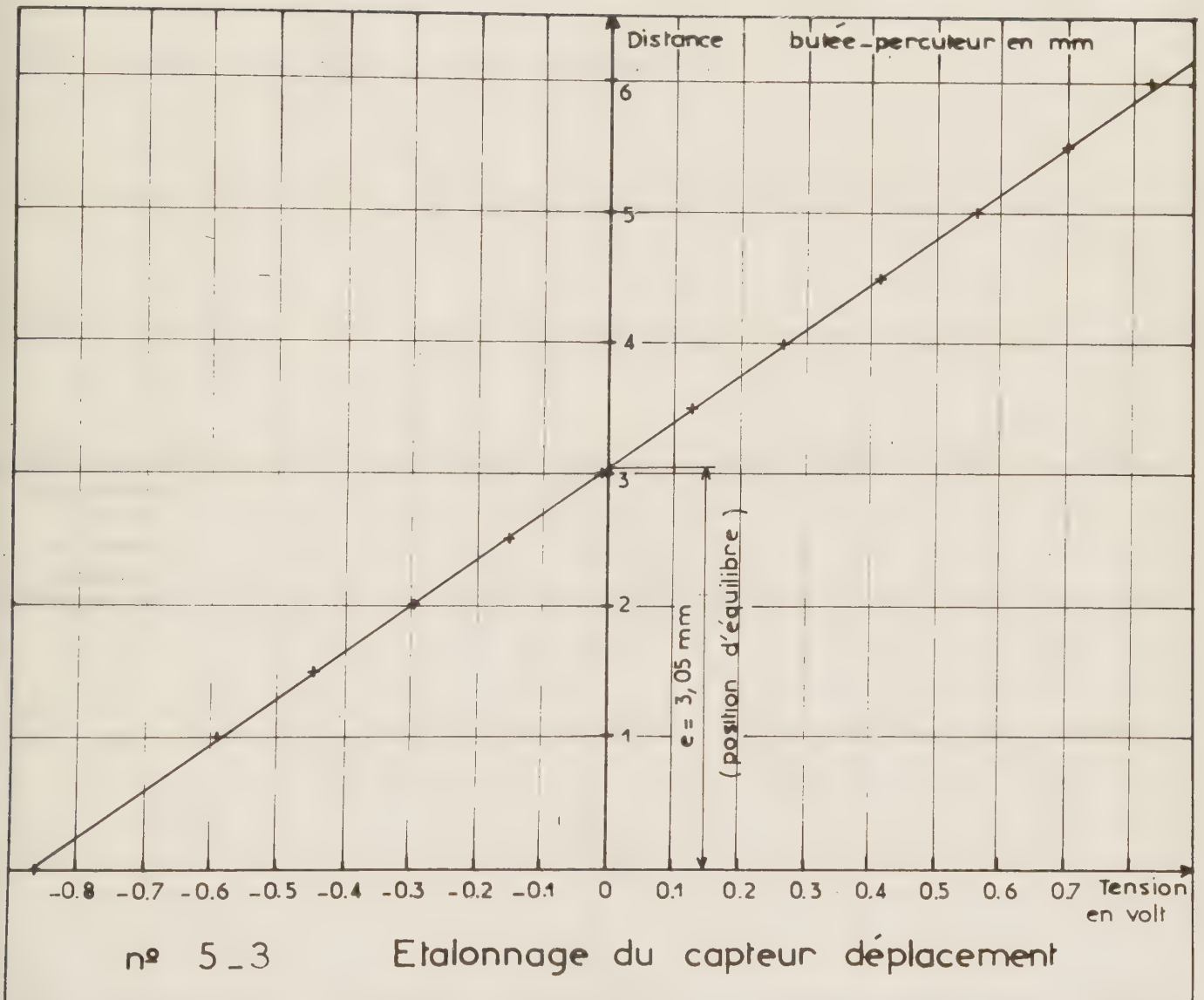
De la valeur désirée pour r, nous en déduisons la période T de l'excitation à obtenir. Le réglage de T s'effectue alors à l'aide du générateur de fréquence, sa valeur étant lue avec précision ($\pm 10^{-3}$ s) sur le périodimètre.

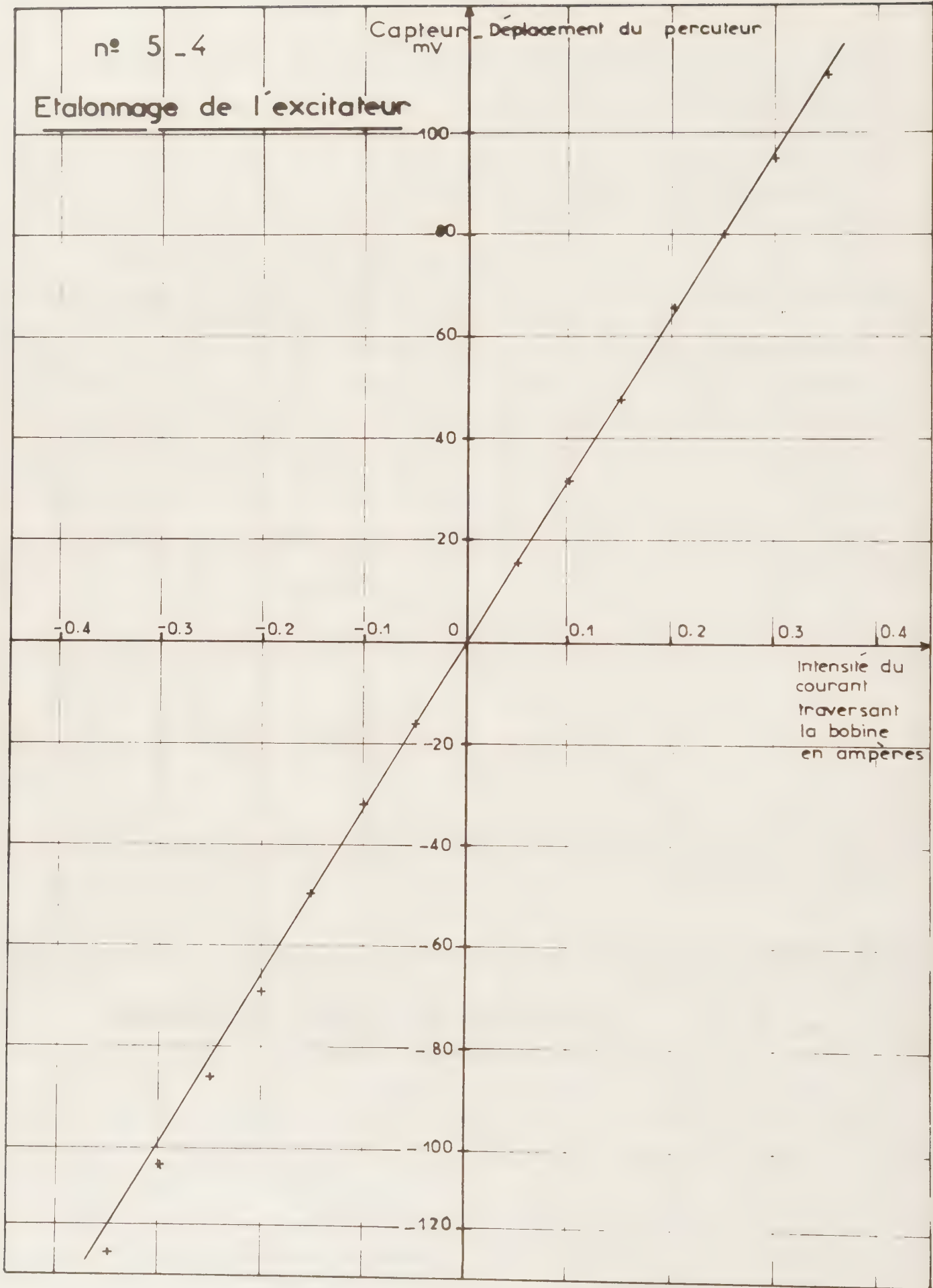
5.4.6 - Mesure de la vitesse relative $\dot{y}$ du percuteur

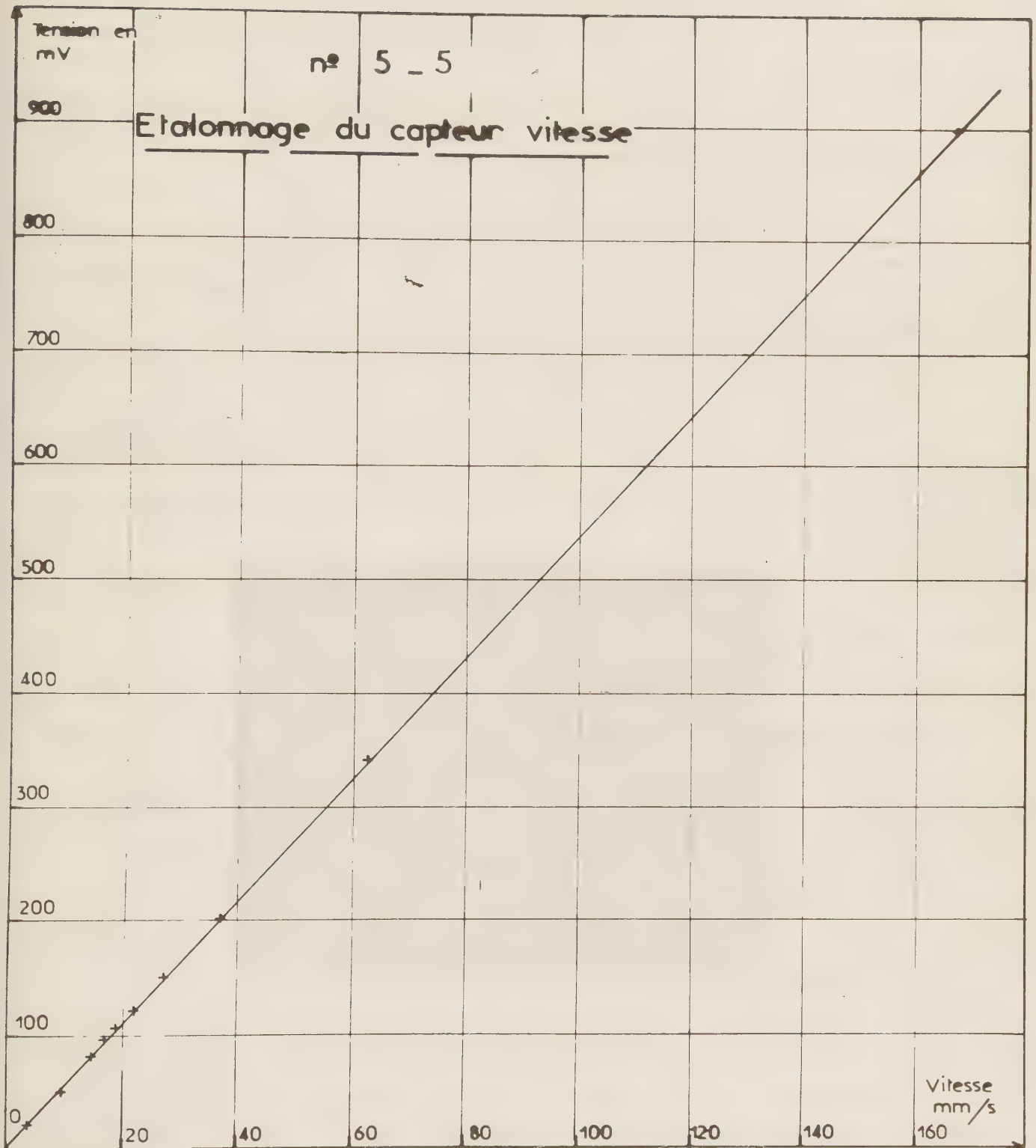
5.4.6.1 - Etalonnage du capteur-vitesse

L'étalonnage du capteur-vitesse s'effectue en régime sinusoïdal forcé, sans percussion (diagramme n°5.3). L'amplitude de la vitesse est obtenue en multipliant l'amplitude du déplacement par la pulsation de l'excitation.

Nous obtenons une variation linéaire entre tension et vitesse ; le coefficient de proportionnalité est :







$$K_2 = 0,186 \text{ mm s}^{-1}/V$$

$$\frac{\Delta K_2}{K_2} < 5.10^{-3}$$

5.4.6.2 - Mesure de $\dot{X}_1^-$

Le pieu étant fixe avant chaque percussion, nous avons :

$$\dot{X}_1^- = \dot{y}(\tau^-).$$

La vitesse du percuteur juste avant la percussion se mesure aisément sur l'oscilloscope.

5.4.6.3 - Mesure du coefficient de restitution R

Par définition, le coefficient de restitution de vitesse R est égal à la valeur absolue du quotient des vitesses relatives du percuteur, respectivement après et avant percussion :

$$R = \left| \frac{\dot{y}(\tau^+)}{\dot{y}(\tau^-)} \right|$$

La vitesse du percuteur juste après la percussion se mesure sur l'écran de l'oscilloscope. Cependant, l'emploi d'un filtre en double T pour éliminer la perturbation du signal vitesse entraîne une imprécision très sensible sur $\dot{y}(\tau^+)$.

Nous effectuons une série de mesures. La valeur moyenne obtenue est :

$$R = 0,59$$

$$\frac{\Delta R}{R} = 6.10^{-2}$$

5.4.7 - Mesure de la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu V_{moy}

Nous mesurons le temps t que met le système à parcourir une certaine longueur L, le long du rail. L est choisi de telle façon que t corresponde à un grand nombre de périodes τ des percussions.

Nous obtenons :
$$V_{\text{moy}} = \frac{L}{t}$$

5.4.8 - Mesure de la force de frottement pieu-sol

5.4.8.1 - Mesure du coefficient de frottement

La surface de glissement sur le rail n'étant pas parfaite, les mesures de V_{moy} ont toutes lieu sur la même partie du rail. Cette surface est régulièrement nettoyée. De même, les patins en hêtre sont fréquemment poncés.

Le rail est incliné. Le système se met à glisser pour une inclinaison α sur l'horizontale. Le coefficient de frottement est alors :

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,21$$

avec :

$$\frac{\Delta(\operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} = 8.10^{-2}$$

5.4.8.2 - Mesure de la force de frottement

Celle-ci est donnée par la relation :

$$F = (m_1 + m_2) g \operatorname{tg} \alpha$$

soit :

$$F = 45 \text{ N}$$

$$\frac{\Delta F}{F} = 8.10^{-2}$$

5.4.9 - Mesure de N

Sur les 2 voies de l'oscilloscope, envoyons respectivement le signal vitesse et le signal excitation. Il suffit alors de compter le nombre de cycles que décrit l'excitation, entre deux percussions consécutives, pour connaître la valeur de N (Photos 5.8 et 5.9).

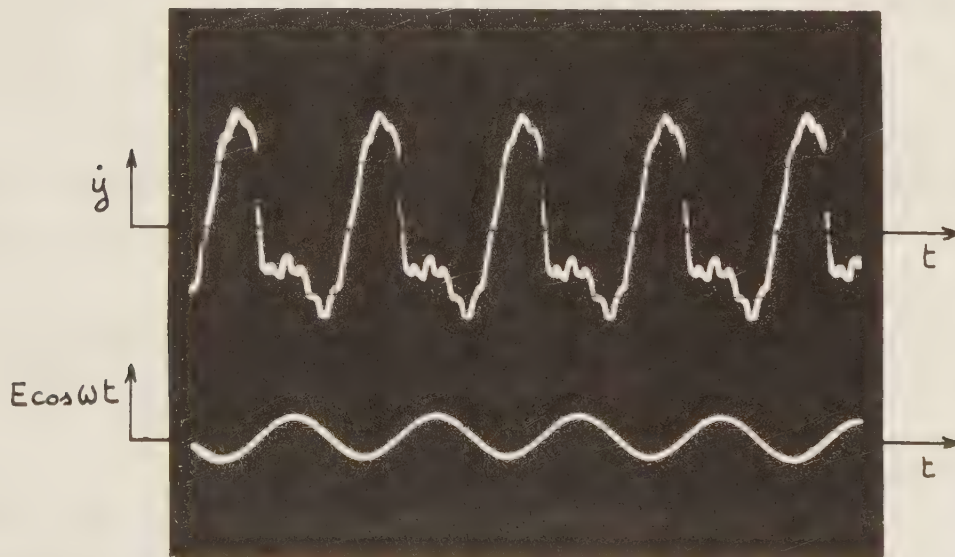


Photo 5.8

N = 1

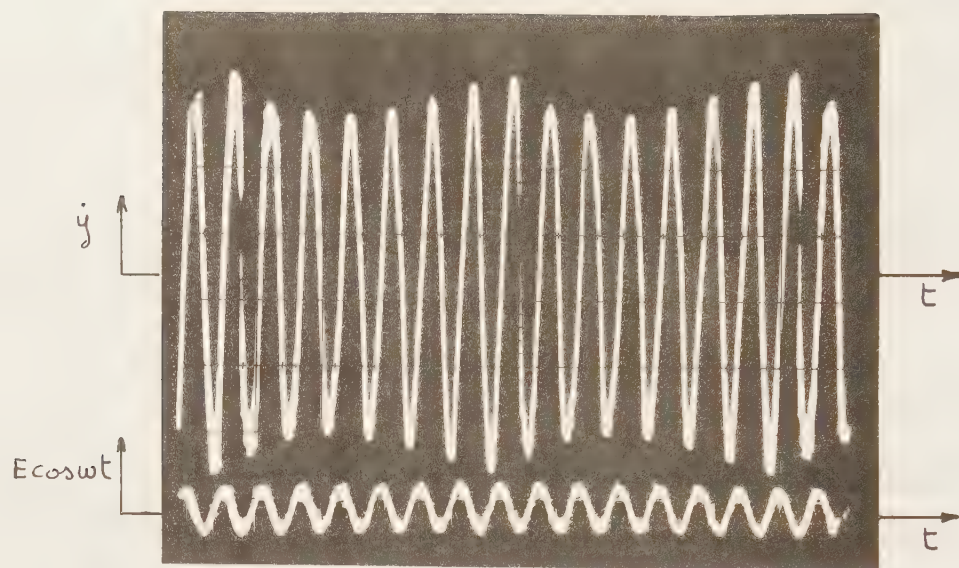


Photo 5.9

$N = 7$

Chapitre 6

RESULTATS EXPERIMENTAUX - CYCLES LIMITES

6.1 - GENERALITES -

L'étude expérimentale est réalisée au Laboratoire de Génie Civil de l'E.N.S.M., à l'aide du dispositif expérimental décrit au chapitre précédent.

Pour trouver les différentes zones de fonctionnement, nous réglons la position du chariot (donc la valeur de l'interstice), puis nous effectuons un balayage en fréquences pour différentes valeurs de l'intensité du courant traversant la bobine d'excitation. Nous relevons alors les différentes zones de fonctionnement.

Puis, après le réglage de $\frac{e}{d}$ à la valeur désirée, nous effectuons un balayage en fréquences en recherchant les percussions régulières. Pour ces percussions, nous mesurons les valeurs de $\dot{X}_1$ et de V_{moy} . Les graphes des fonctions $\frac{\dot{X}_1}{\omega_0 e} = f(r)$ et $\frac{V_{\text{moy}}}{\omega_0 e} = g(r)$ sont ensuite tracés.

Pour quelques valeurs des paramètres, nous enregistrons les cycles limites correspondants, c'est-à-dire la représentation expérimentale de la fonction $\dot{y} = h(y)$ dans le plan de phase.

6.2 - PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS -

6.2.1 - Plage d'accrochage automatique

L'accrochage automatique n'est réalisable que dans la plage de fréquences où l'amplitude $\mathcal{A}$ des oscillations forcées est égale ou supérieure à e (figure 6.1), ce qui se traduit par la relation :

$$\mathcal{A} = \frac{d}{|1-r^2|} \geq e$$

ce qui impose à r d'appartenir au segment $[\sqrt{1 - \frac{d}{e}}, \sqrt{1 + \frac{d}{e}}]$

En dehors de cette plage, les percussions peuvent exister, mais elles ne sont plus automatiques. Elles doivent être provoquées, soit manuellement, soit en faisant un balayage en fréquences croissantes ou décroissantes, comme indiqué respectivement sur les figures 6.1 et 6.2.

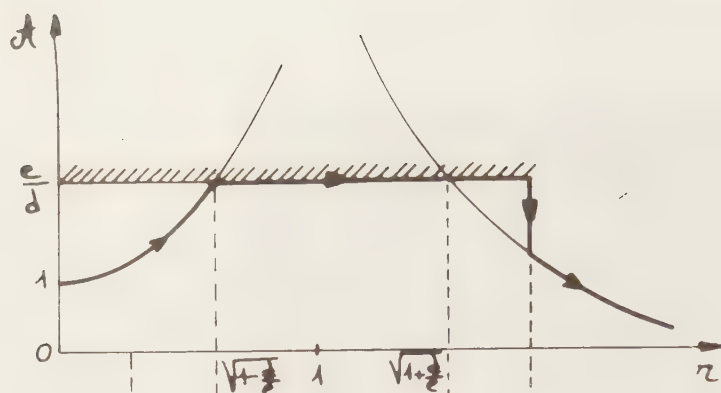


Fig. 6.1

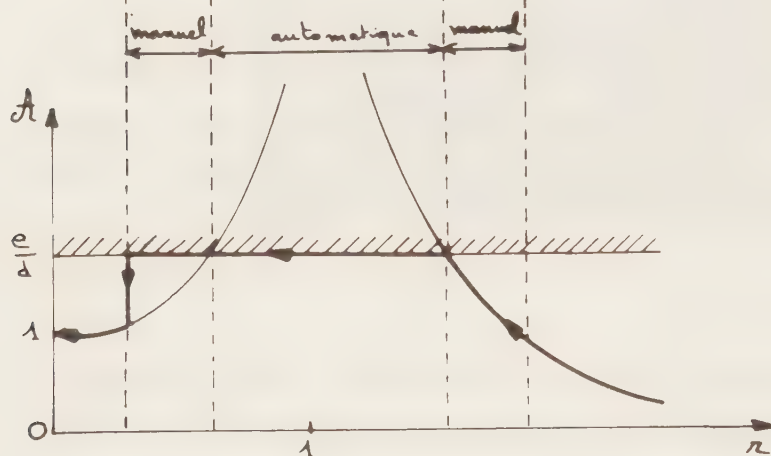


Fig. 6.2

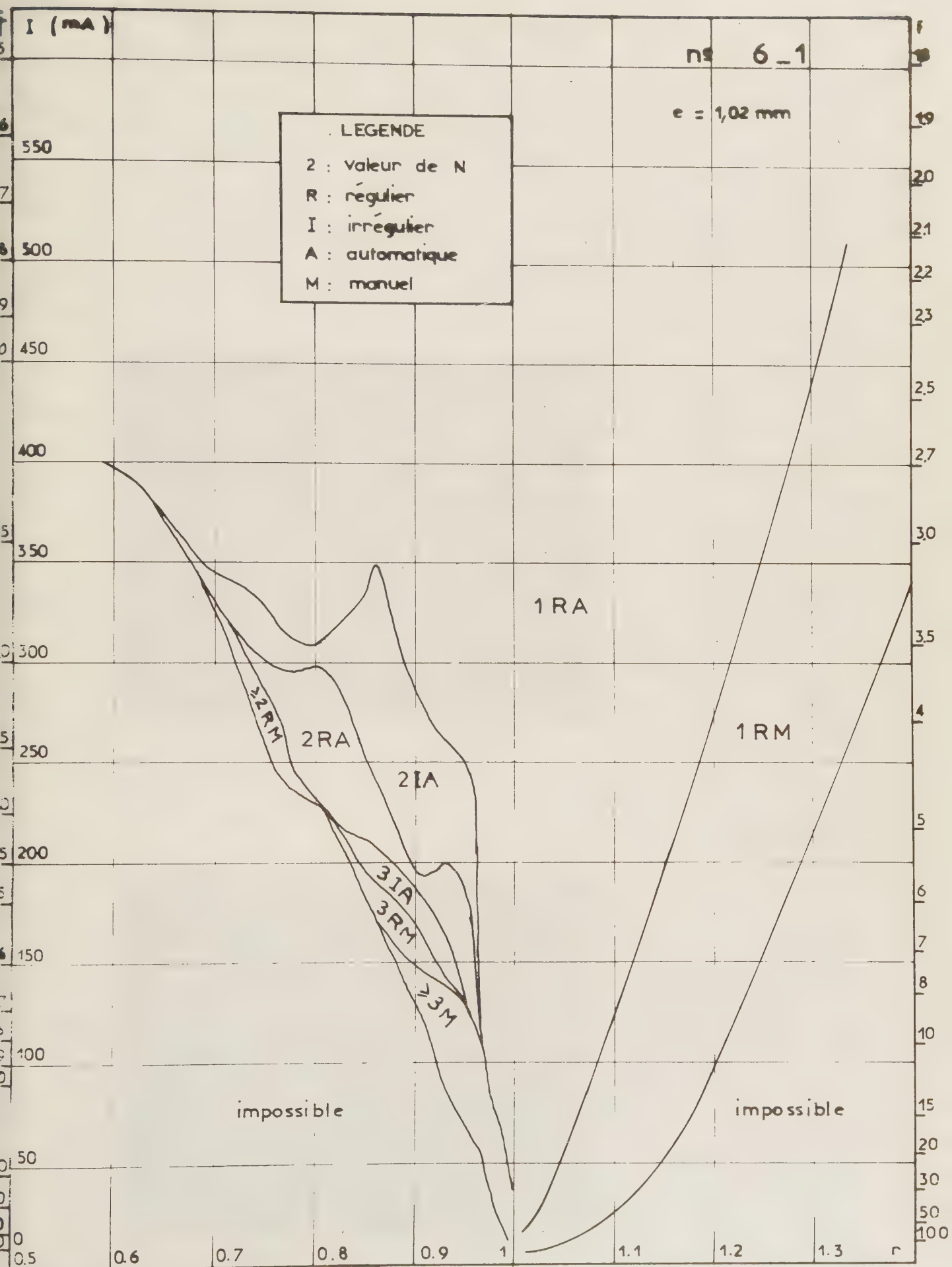
6.2.2 - Résultats

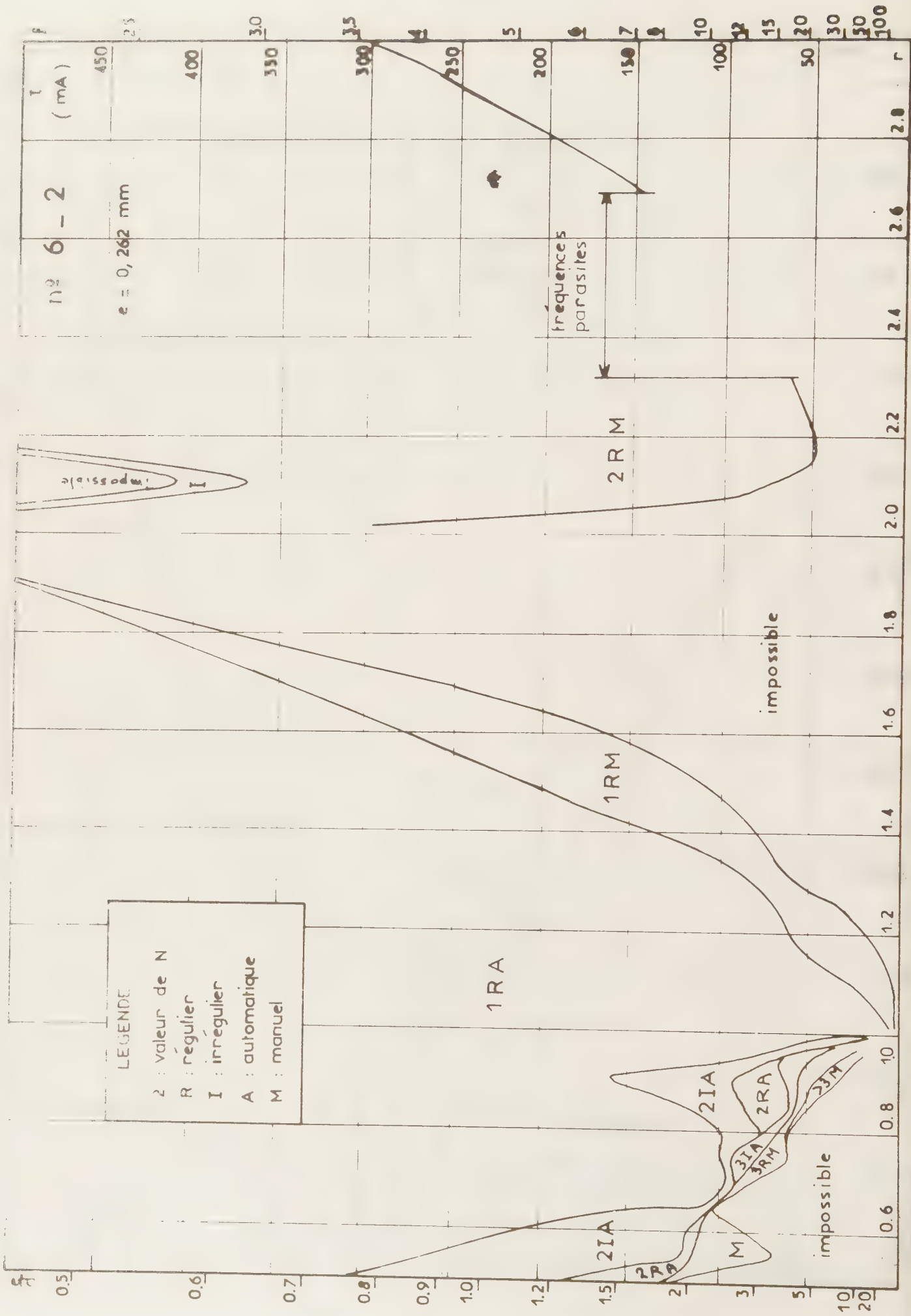
Les différents domaines de fonctionnement sont représentés sur les diagrammes n°6.1 et 6.2.

6.2.3 - Observations

- $0 < r < 1$: les différentes valeurs de N peuvent coexister
- r très voisin de 1 : l'accrochage est automatique. Les courbes sont interrompues, car, pour les faibles intensités envoyées alors dans la bobine d'excitation, la force d'excitation n'est plus parfaitement sinusoïdale.
- $1 < r < 2$: $N = 1$ seulement
- $2 < r < 3$: $N = 2$ seulement

Les valeurs données à $\frac{e}{d} = \frac{ke}{E}$ sont limitées inférieurement, car les très petites valeurs de l'interstice e ne peuvent plus être mesurées avec suffisamment de précision ; de plus, l'intensité du courant traversant la bobine (donc d) est limitée supérieurement pour éviter l'échauffement de celle-ci.

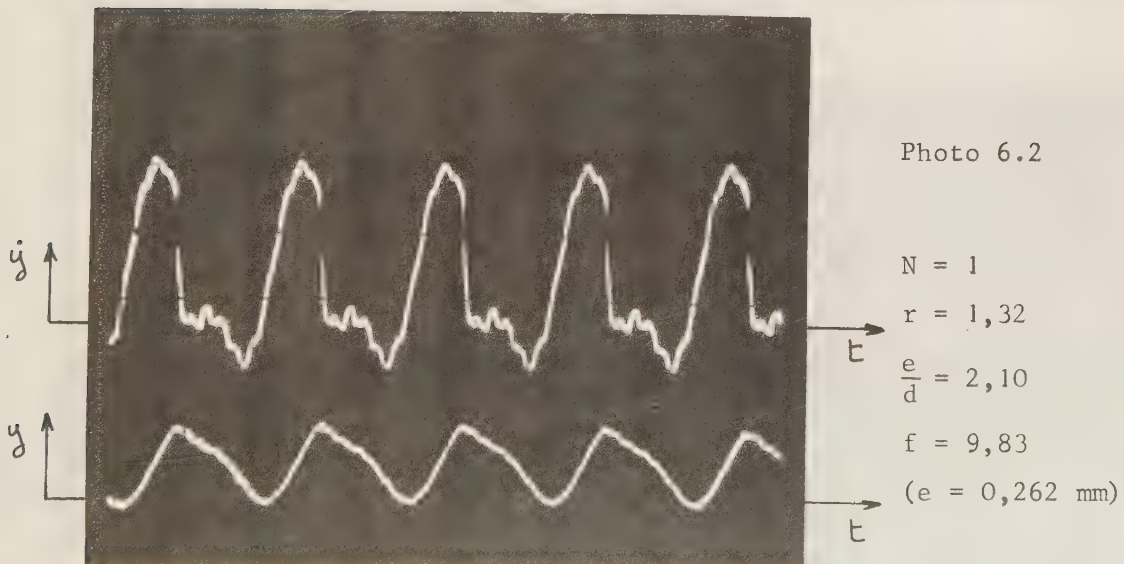
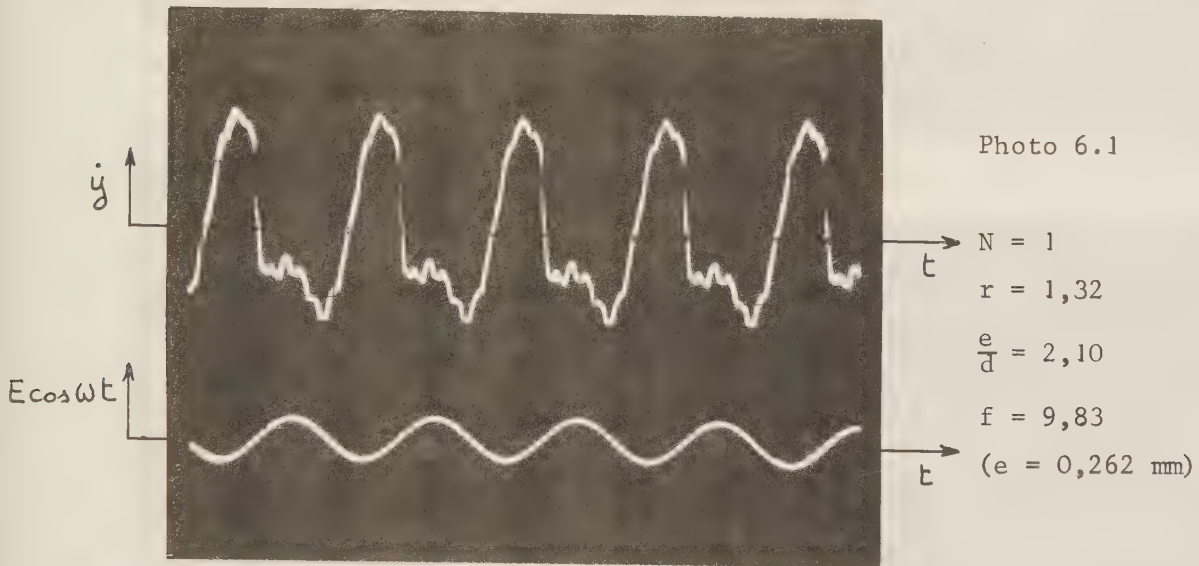




6.2.4 - Photographies

Les photographies suivantes, prises à l'appareil photo POLAROÏD montrent :

- d'une part, le signal vitesse en fonction du temps, pris à la sortie du filtre en double T ;
- d'autre part, soit le signal déplacement en fonction du temps, soit le signal proportionnel à la force d'excitation.



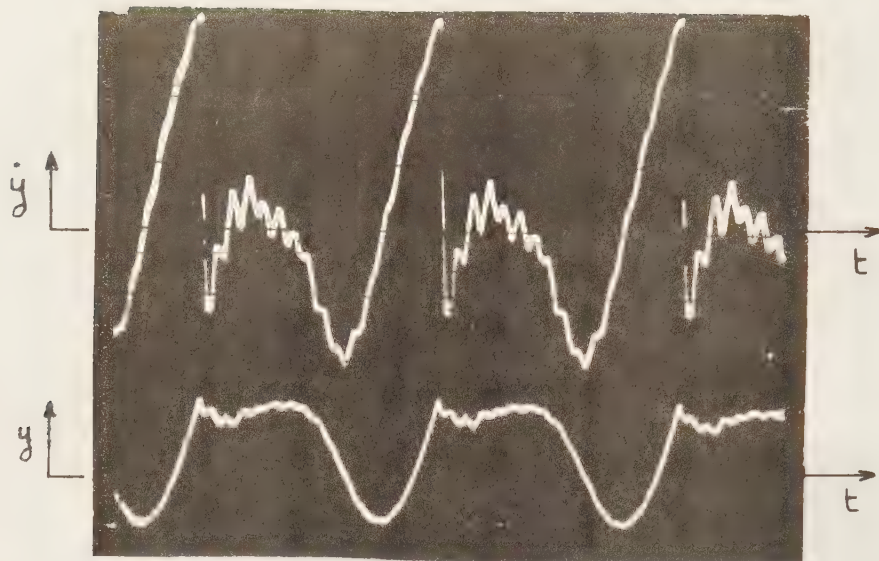


Photo 6.3

$N = 1$
(juste avant le
passage à $N = 2$)

$$r = 0,78$$

$$\frac{e}{d} = 0,89$$

$$f = 4,16$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

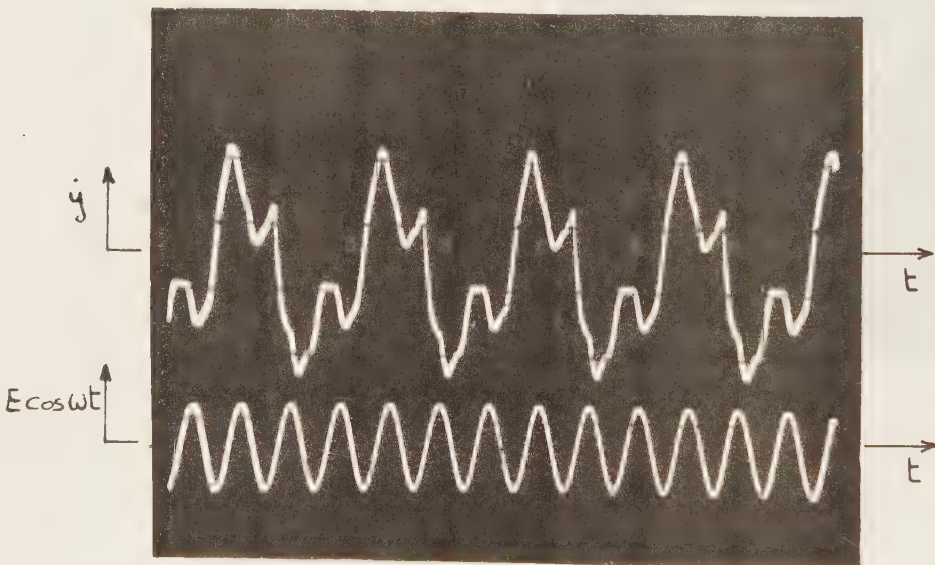


Photo 6.4

$$N = 3$$

$$r = 3,77$$

$$\frac{e}{d} = 0,52$$

$$f = 2,46$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

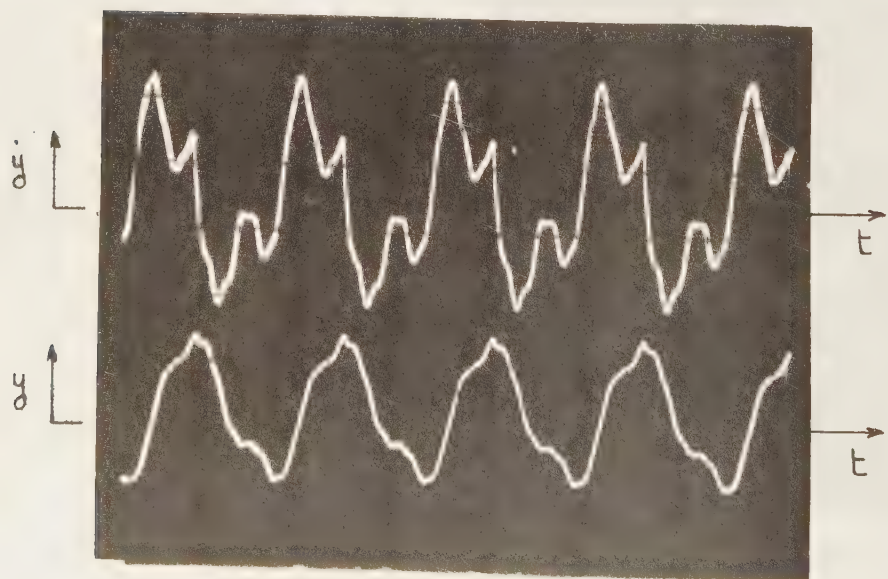


Photo 6.5

$$N = 3$$

$$r = 3,77$$

$$\frac{e}{d} = 0,52$$

$$f = 2,46$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

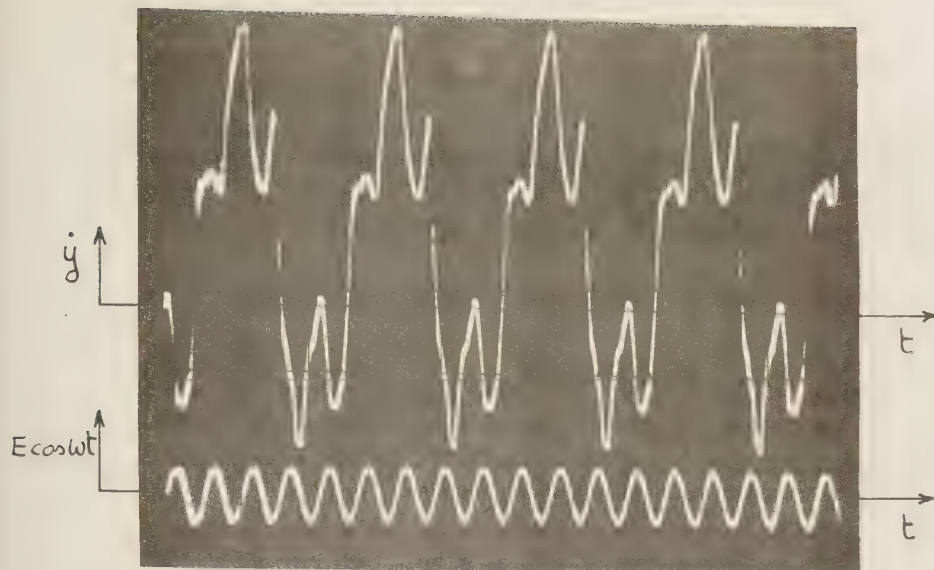


Photo 6.6

$$N = 4$$

$$r = 5,00$$

$$\frac{e}{d} = 0,42$$

$$f = 1,97$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

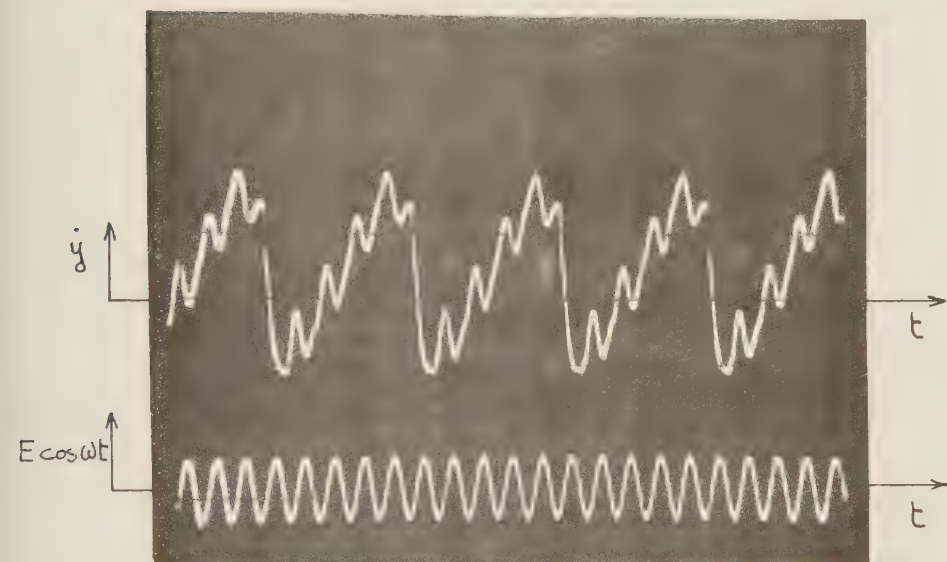


Photo 6.7

$$N = 5$$

$$r = 6,45$$

$$\frac{e}{d} = 0,37$$

$$f = 1,72$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

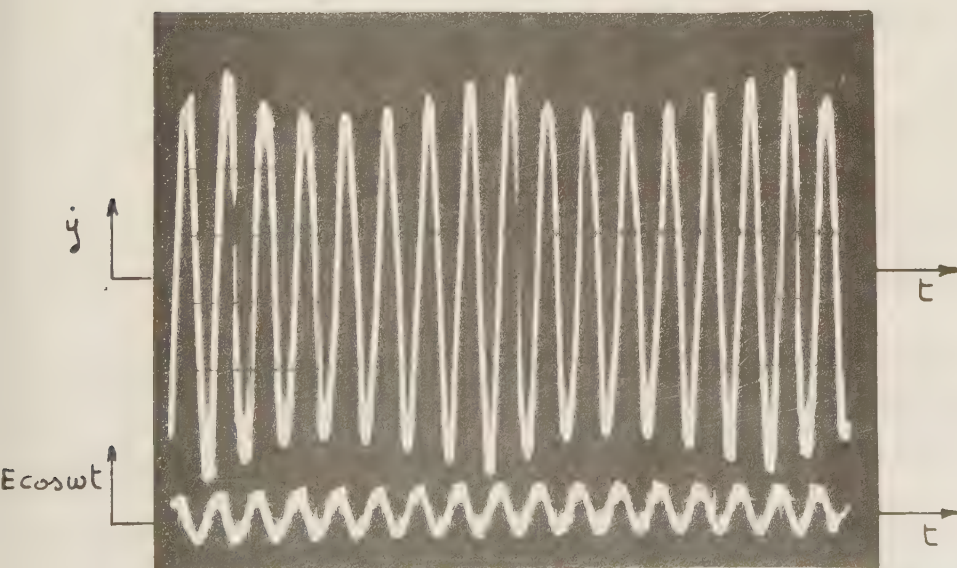


Photo 6.8

$$N = 7$$

$$r = 0,95$$

$$\frac{e}{d} = 10,26$$

$$f = 48,1$$

$$(e = 0,262 \text{ mm})$$

6.2.5 - Diagrammes

Les graphes expérimentaux des fonctions $\frac{\dot{X}_1^-}{\omega_o e} = f(r)$ et $\frac{V_{moy}}{\omega_o e} = g(r)$ sont tracés pour quelques valeurs de e et de E , correspondant aux zones de fréquences où la nature des chocs est nettement caractérisée.

$$\text{diagramme 6.3 : } \frac{\dot{X}_1^-}{\omega_o e} = f(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{d} = 1,0 \quad \text{et} \quad f = 3,4 \pm 0,4 \\ \frac{e}{d} = 2,0 \quad \text{et} \quad f = 6,8 \pm 0,7 \end{array} \right.$$

$$\text{diagramme 6.4 : } \frac{V_{moy}}{\omega_o e} = g(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{d} = 1,0 \quad \text{et} \quad f = 3,4 \pm 0,4 \\ \frac{e}{d} = 2,0 \quad \text{et} \quad f = 6,8 \pm 0,7 \end{array} \right.$$

$$\text{diagramme 6.5 : } \frac{\dot{X}_1^-}{\omega_o e} = f(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{d} = 1,0 \quad \text{et} \quad f = 4,1 \pm 0,5 \\ \frac{e}{d} = 1,3 \quad \text{et} \quad f = 5,3 \pm 0,6 \\ \frac{e}{d} = 2,0 \quad \text{et} \quad f = 8,2 \pm 0,9 \end{array} \right.$$

$$\text{diagramme 6.6 : } \frac{V_{moy}}{\omega_o e} = g(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{d} = 1,0 \quad \text{et} \quad f = 4,1 \pm 0,5 \\ \frac{e}{d} = 2,0 \quad \text{et} \quad f = 8,2 \pm 0,9 \end{array} \right.$$

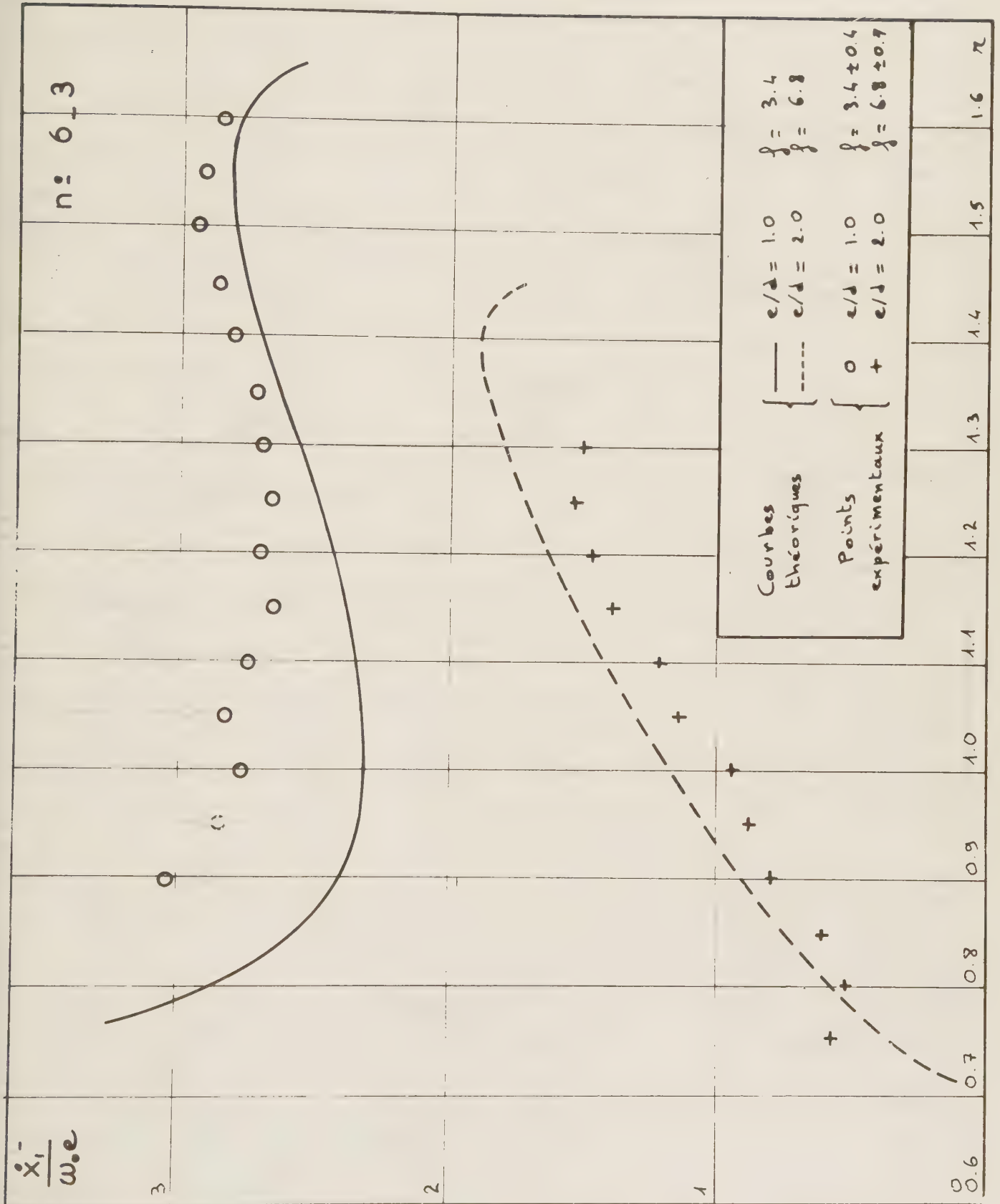
En ce qui concerne $\frac{\dot{X}_1^-}{\omega_o e}$, les points expérimentaux se situent au voisinage des graphes théoriques.

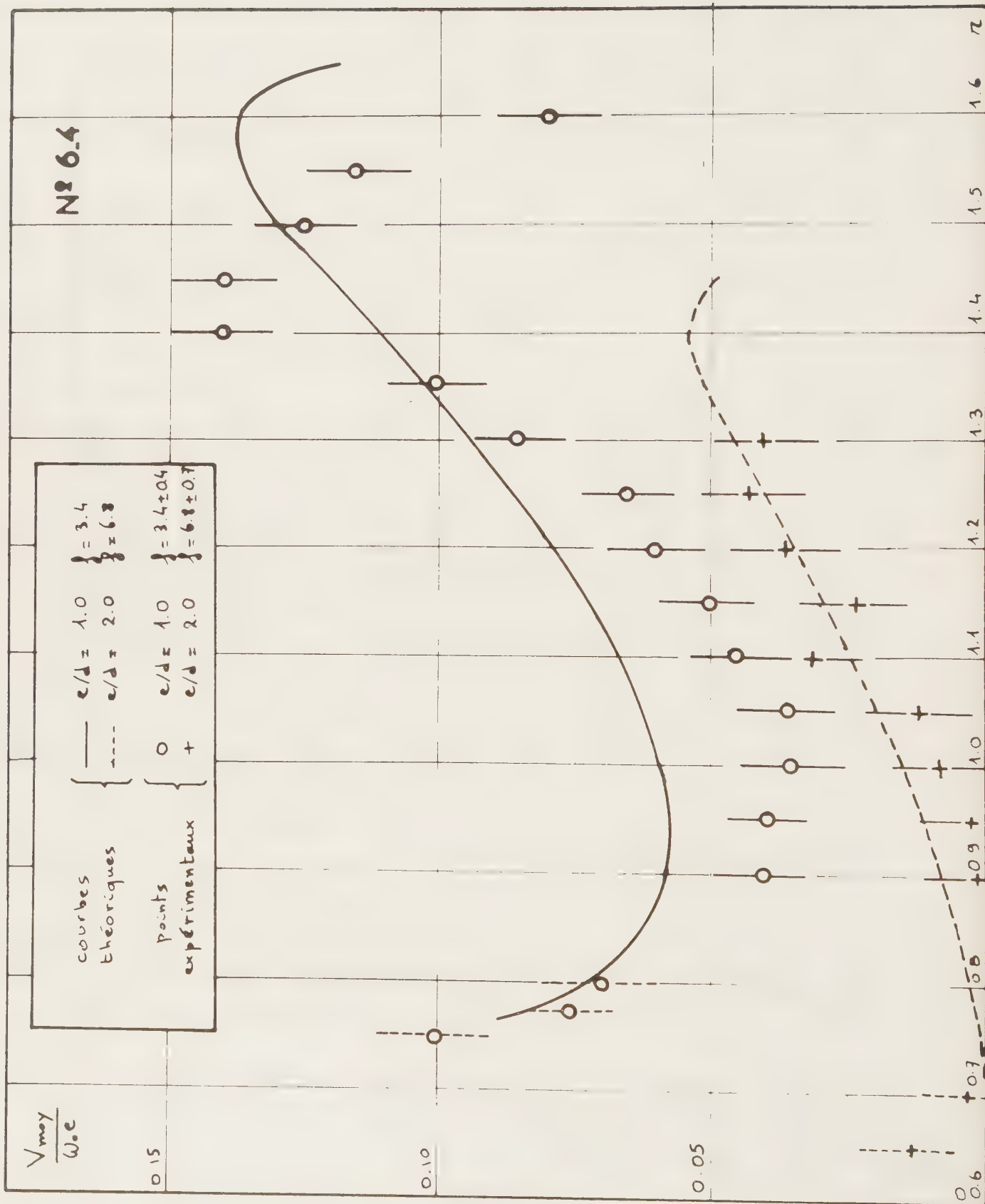
Pour $\frac{V_{moy}}{\omega_o e}$, la dispersion est beaucoup plus grande. Ceci résulte de la difficulté de connaître la force de frottement s'opposant effectivement au déplacement :

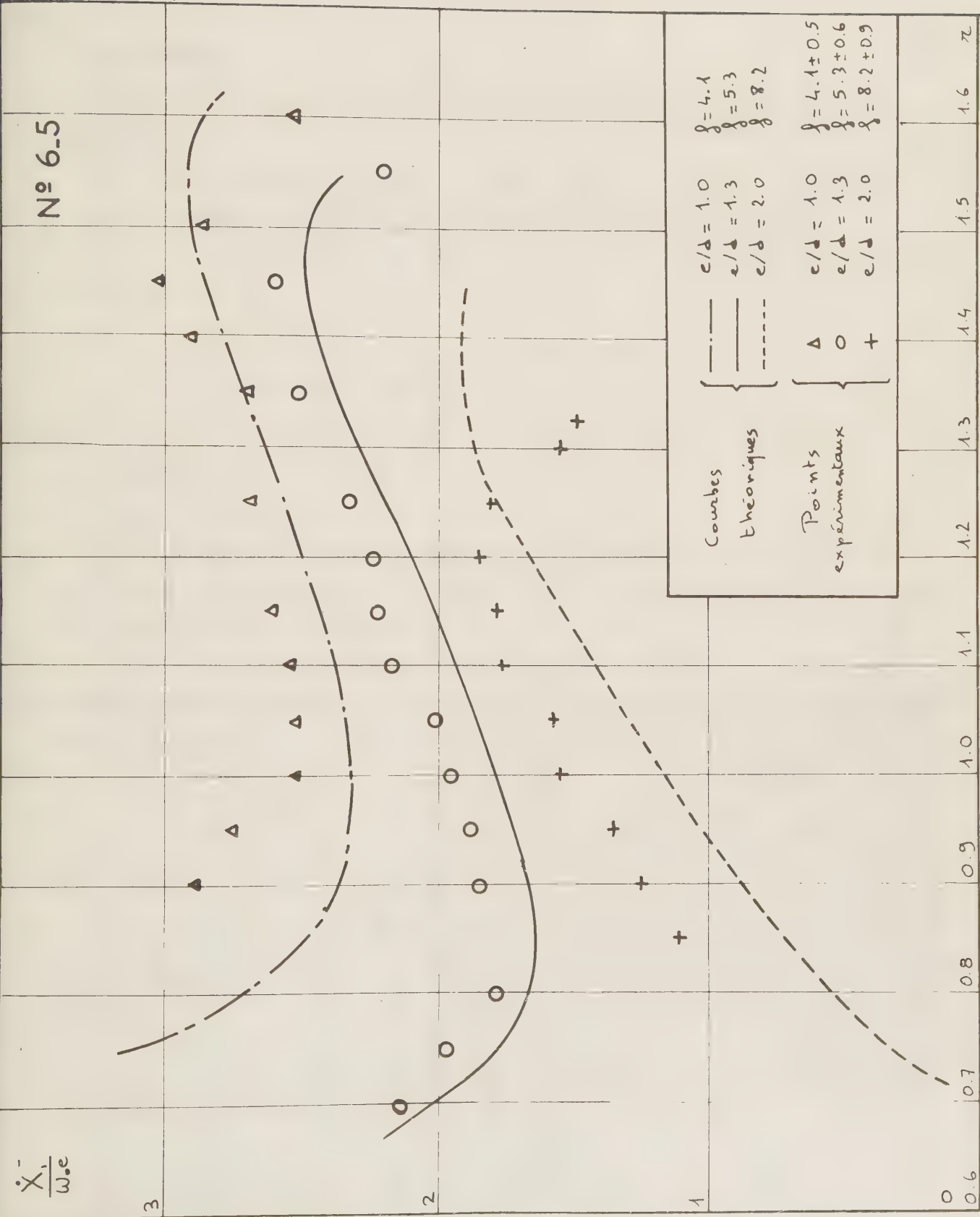
- d'une part, la surface de glissement sur le profilé n'est pas parfaite ;
- d'autre part, la surface des patins en hêtre s'encrasse très rapidement, même pour un glissement de quelques centimètres.

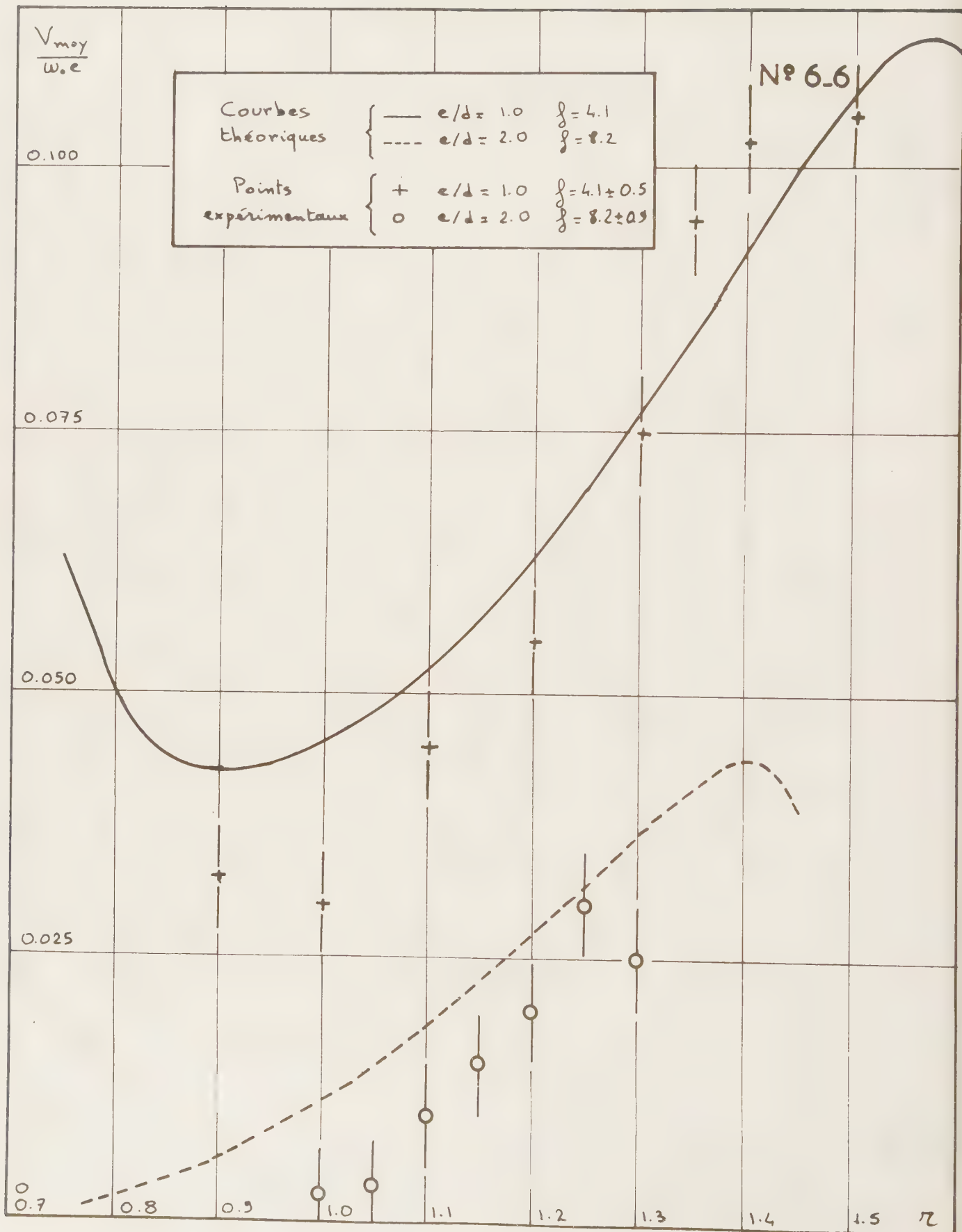
Plusieurs mesures effectuées pour un même réglage des différents paramètres donnent des résultats pour V_{moy} notablement différents. En prenant les moyennes de plusieurs mesures, on retrouve qualitativement l'allure de la courbe.

L'encrassement des patins n'influe pas sur la mesure de $\dot{X}_1^-$ qui est faite toujours dans les mêmes conditions, dès les premières percussions.









Les plages de fréquences correspondant à un fonctionnement "régulier" concordent approximativement.

6.3 - CONCLUSION -

L'étude expérimentale réalisée met en évidence les caractéristiques suivantes :

- les percussions sont "régulières" dès que le nombre de cycles de l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier ;
- le phénomène étudié est non linéaire et le phénomène de résonance n'existe plus ;
- seul le cas $N = 1$ apparaît quand r varie de 1 à 2 ;
- N multiple apparaît pour $r < 1$ et $r > 2$.

6.4 - CYCLES LIMITES -

6.4.1 - Généralités

Un cycle limite se définit comme étant, pour un mouvement périodique donné, le graphe de la fonction $\dot{x} = f(x)$, où x est une fonction du temps (x : déplacement ; $\dot{x}$: vitesse).

Ce graphe est tracé dans le plan de phase $(x, \dot{x})$. Rappelons que pour un mouvement sinusoïdal en régime permanent, les cycles limites sont des ellipses de Lissajous. Ce sont des cercles dans le plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0})$.

6.4.2 - Réalisation des cycles limites

Pour tracer un cycle limite, il est nécessaire de connaître, à tout instant, la vitesse et le déplacement.

Le capteur-vitesse et le capteur-déplacement nous fournissent la vitesse relative $\dot{y}$ et le déplacement relatif y du percuteur. Les signaux obtenus sont envoyés sur les 2 voies de l'oscilloscope, suivant le schéma de la figure 6.3.

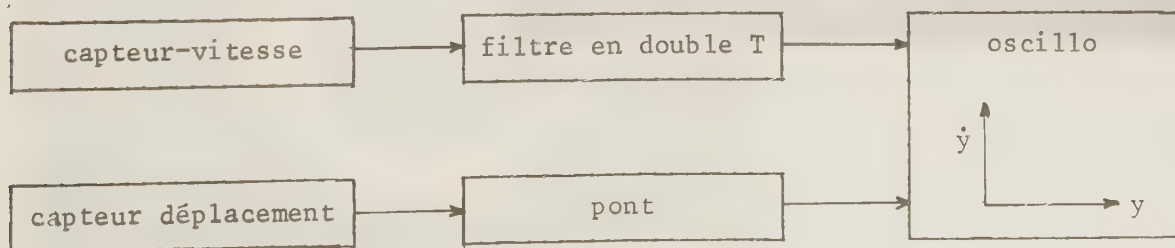


Fig. 6.3

6.4.3 - Résultats

Nous avons vu au chapitre 1 que le déplacement relatif y est la somme de deux termes, l'un correspondant aux oscillations libres, l'autre aux oscillations forcées :

$$y = y_{\ell} + y_f$$

Puis nous avons tracé dans le plan de phase "réduit" le cycle limite correspondant aux oscillations libres. Sur l'écran de l'oscilloscope sont superposés les cycles limites des oscillations libres et des oscillations forcées. Ce qui conduit à 3 types de cycles :

1er type : $N = 1$ (Photo 6.9)

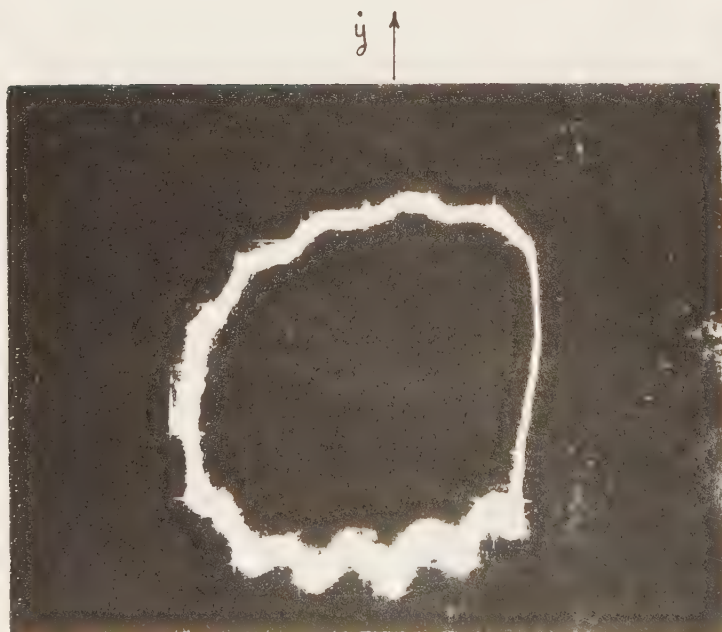
Le cycle limite obtenu est le même que celui trouvé dans le plan de phase "réduit".

2ème type : $N > 1$ et $r < 1$ (Photos 6.10, 6.11, 6.12)

Le point courant effectue N tours avant la discontinuité.

3ème type : $N > 1$ et $r > 1$ (Photos 6.13, 6.14, 6.15)

Le point courant effectue un seul tour et N boucles.



1er type

$$N = 1$$

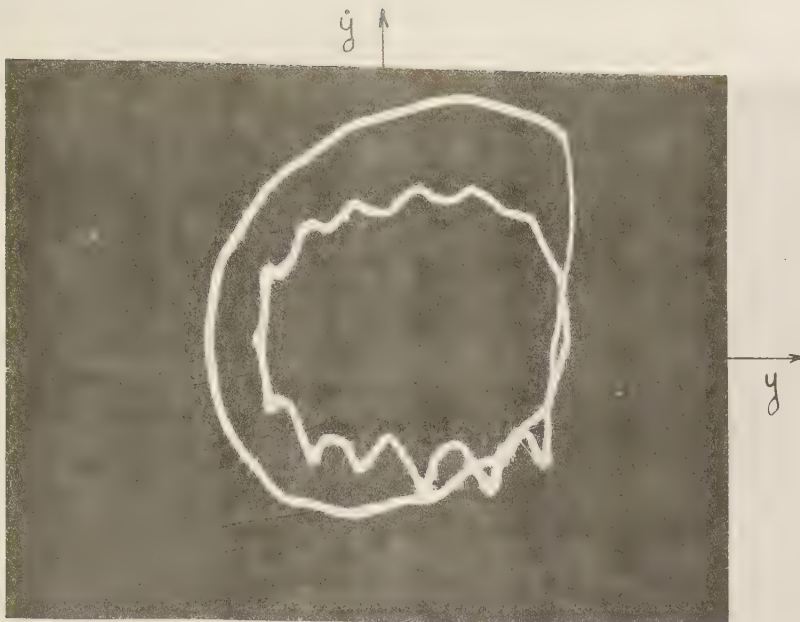
$$r = 1,04$$

$$e = 1,02 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 4,88$$

$$f = 5,88$$

Photo 6.9



2ème type

$$N = 2$$

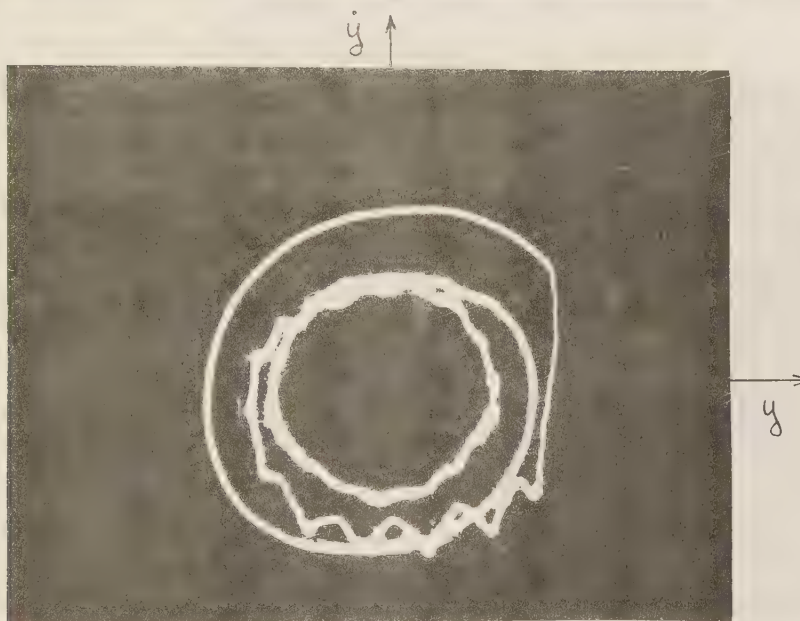
$$r = 0,94$$

$$e = 1,02 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 4,88$$

$$f = 5,88$$

Photo 6.10



2ème type

$$N = 3$$

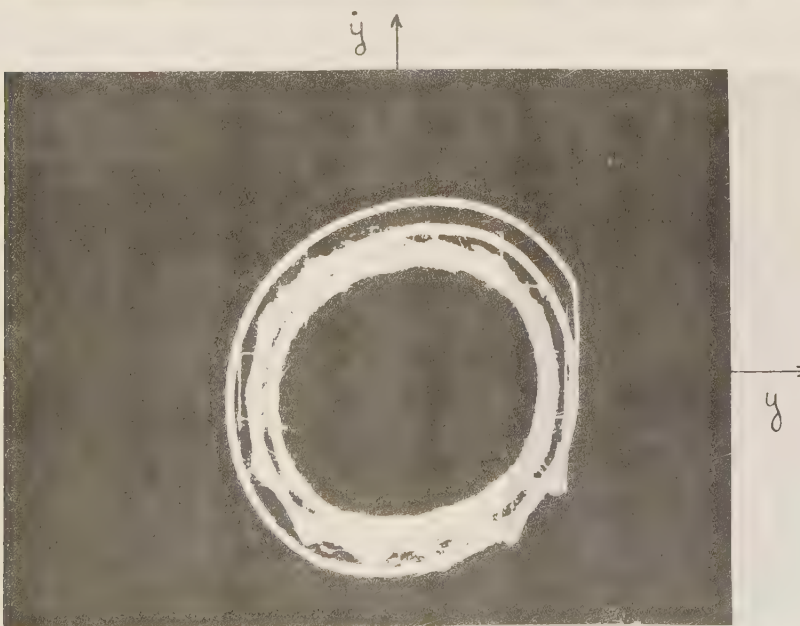
$$r = 0,88$$

$$e = 1,02 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 4,88$$

$$f = 5,88$$

Photo 6.11



2ème type

$$N = 5$$

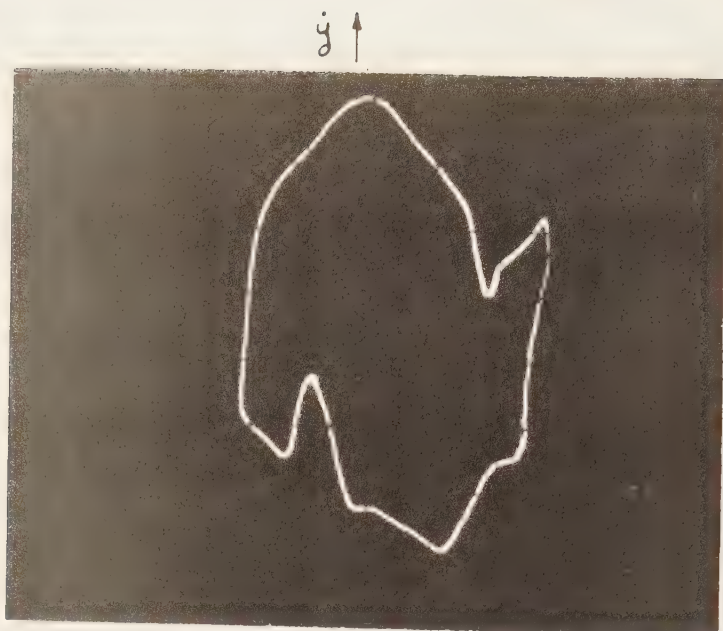
$$r = 0,93$$

$$e = 1,02 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 8,64$$

$$f = 10,40$$

Photo 6.12



3ème type

$$N = 3$$

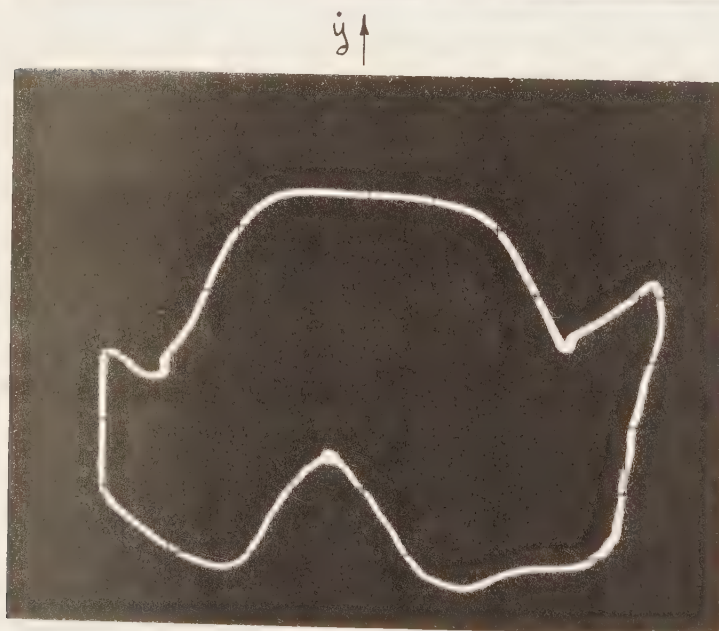
$$r = 3,17$$

$$e = 0,262 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 0,52$$

$$f = 2,46$$

Photo 6.13



3ème type

$$N = 4$$

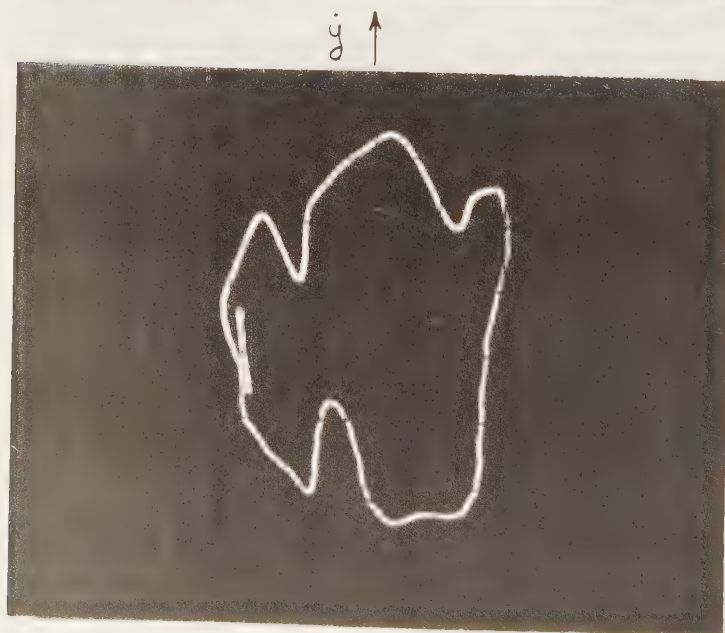
$$r = 5,00$$

$$e = 0,262 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 0,42$$

$$f = 1,97$$

Photo 6.14



3ème type

$$N = 5$$

$$r = 6,45$$

$$e = 0,262 \text{ mm}$$

$$\frac{e}{d} = 0,37$$

$$f = 1,72$$

Photo 6.15

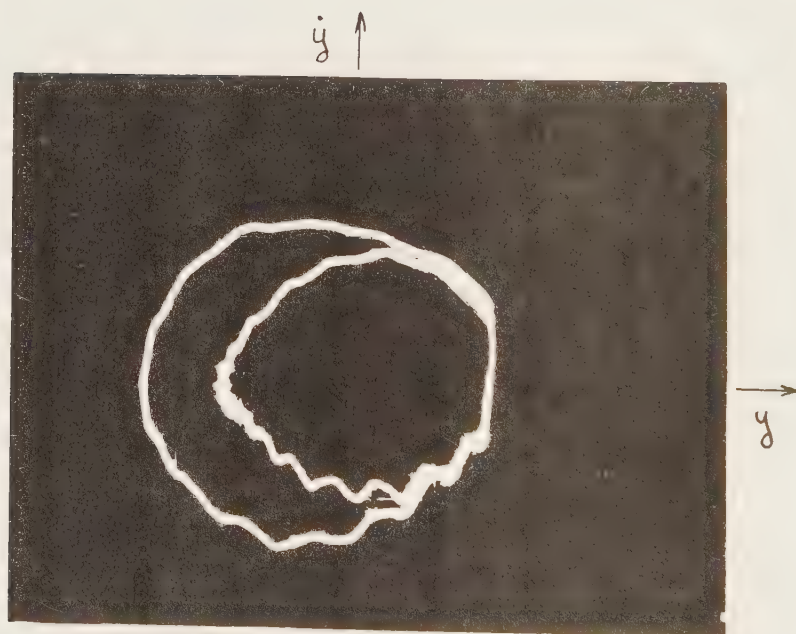
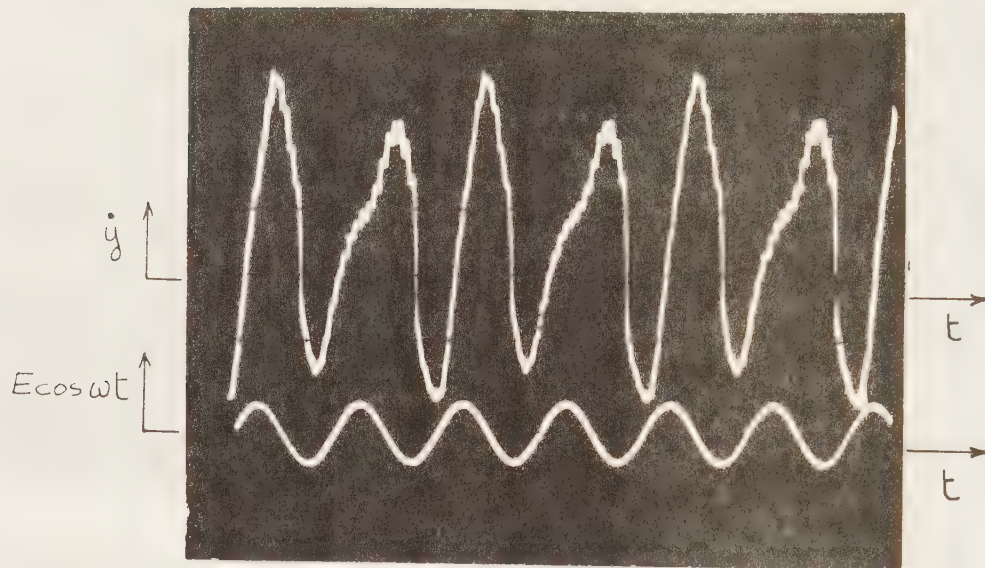
CONCLUSION

L'étude, tant théorique qu'expérimentale, d'un système vibropercuteur à un degré de liberté monté sur un pieu s'enfonçant dans un sol, nous a permis de mettre en évidence les caractéristiques suivantes :

- . le mouvement n'est régulier que si, et seulement si, le nombre de cycles décrits par l'excitation, entre deux percussions consécutives, est un entier ;
- . la présence des percussions transforme le système vibrant en système non linéaire, pour lequel le phénomène de résonance n'existe plus ;
- . il existe des domaines de fréquences où le fonctionnement du percuteur ne se fait pas par accrochage automatique ;
- . il existe des domaines de fréquences où le mouvement "régulier" peut exister, mais n'est pas stable ;
- . le déplacement de l'ensemble peut, dans un certain nombre de cas, être considéré comme instantané ;
- . pour un niveau d'énergie constant fourni au système, la vitesse de percussion et la vitesse moyenne d'enfoncement du pieu dépendent de la fréquence d'excitation, de l'interstice, du coefficient de restitution de vitesse, de la masse du pieu et de la force de frottement.

Nous rappelons que l'étude réalisée a été limitée aux mouvements "réguliers". Ceci se justifie par le fait que l'étude expérimentale a montré que, lorsque le mouvement avec percussions existe, il est presque toujours "régulier".

Nous avons pu mettre en évidence d'autres mouvements périodiques dont les percussions consécutives ne sont pas identiques (voir photos ci-après pour $e = 1,02 \text{ mm}$, $r = 0,724$, $\frac{e}{d} = 2,81$, $f = 3,38$).



Cycle limite

Nous avons limité l'action du sol sur le pieu à une force de frottement latéral. Nos calculs sont en fait effectués dans le cas d'une force résistante constante, quelle que soit la nature de cette force. Celle-ci peut donc être soit un frottement latéral constant, indépendant de la fiche (ceci est réalisé par tranches de pieu), soit une résistance de pointe, soit par les deux,

si l'on ne peut considérer que l'une de ces forces est faible devant l'autre.

Nous poursuivons actuellement l'étude dans le cas où la durée de glissement du pieu n'est plus petite devant la période des percussions. Deux cas peuvent alors se produire suivant que le pieu s'arrête ou non entre deux percussions. Nous ne nous intéressons toujours qu'au mouvement "régulier". Nous élargirons cette étude au cas où l'interstice est nul, et au cas où l'interstice est "négatif" (c'est-à-dire qu'au repos, le percuteur et la butée sont en contact, les ressorts étant partiellement comprimés).

Enfin, nous avons l'intention de tenir compte de l'élasticité et de l'inertie du sol.

Parallèlement à ce travail, nous terminons l'étude de la limite d'enfoncement d'un pieu, en présence d'une butée élastique (phénomène de refus).

Annexe

PROGRAMME DE CALCUL

(langage FORTRAN)

MAINPGM

```

0001      REAL MU
0002      DIMENSION NN(10),RR(10),EE(15),FF(10),WW(120),XMU(10),X(4),Y(4),T
2(120,4),A(120,4),DELTX2(120,4),VMOY(120,4),XPRIM1(120,4),ECART(12
3,4),ECARX(120,4),ISTAB(120,4),PR(120)

0003      10 FORMAT(I3)
0004      11 FORMAT(10I1)
0005      12 FORMAT(15F5.2)
0006      13 FORMAT(F6.3)
0007      14 FORMAT(10I2)
0008      READ(1,11)NFOIS
0009      READ(1,10)JW
0010      READ(1,13)(WW(I),I=1,JW)
0011      PI=3.14159265
0012      NTEST=0
0013      15 NTEST=NTEST+1
0014      READ(1,14)JN,JR,JE,JF,JMU
0015      READ(1,11)(NN(I),I=1,JN)
0016      READ(1,12)(RR(I),I=1,JR)
0017      READ(1,12)(EE(I),I=1,JE)
0018      READ(1,12)(FF(I),I=1,JF)
0019      READ(1,12)(XMU(I),I=1,JMU)
0020      DO 100 IR=1,JR
0021      R=RR(IR)
0022      DO 100 IMU=1,JMU
0023      MU=XMU(IMU)
0024      PA=(1.+2.*MU-R)/(1.+R)
0025      DO 100 IF=1,JF
0026      F=FF(IF)
0027      DO 100 IE=1,JE
0028      E=EE(IE)
0029      FORCE=F-E
0030      IF(FORCE.LE.0.)GO TO 100
0031      G=FORCE/(MU*E)
0032      DO 99 IN=1,JN
0033      N=NN(IN)
0034      NJ=1
0035      DO 50 IW=1,JW
0036      W=WW(IW)
0037      TAU=2.*N*PI/W
0038      STAU=SIN(TAU/2.)
0039      IF(ABS(STAU).LE.0.0001)GO TO 50
0040      C=COTAN(TAU/2.)
0041      WC=W*W
0042      W2=1.-WC
0043      A1=C*C/WC+1.
0044      A2=-2.*C*(1.+PA/WC)
0045      A3=C*C+PA*PA/WC-2./G
0046      A4=2.*C/G
0047      A5=(E*E-1./(W2*W2))*MU*MU/(FORCE*FORCE)
0048      CALL BAIRST(A1,A2,A3,A4,A5,X,Y)
0049      K=0
0050      DO 20 I=1,4
0051      IF(Y(I).NE.0.)GO TO 20
0052      T=X(I)

```

MAINPGM

```

053      IF(T.LE.0.)GO TO 20
054      APSI=ATAN(T)-TAU/2.
055      SC=STAU*COS(TAU/2.+APSI)
056      IF(SC.LT.0.)GO TO 18
057      APSI=APSI+PI
058      SC=-SC
059      18 AMPL=-G*T/SC
060      COFI=1.+G*T*(C-T)
061      SIFI=G*T*(C*T-PA)/W
062      TEST=YLTE(AMPL,SIFI,COFI,APSI,TAU,E,W)
063      IF(TEST.EQ.2.)GO TO 20
064      K=K+1
065      TT(NO,K)=T
066      A(NO,K)=AMPL
067      ALPHA=2.*G*T
068      DELTX2(NO,K)=ALPHA*T
069      VMOY(NO,K)=2.*FORCE*T*T/(MU*TAU*E)
070      XPRIM1(NO,K)=ALPHA*(1.+MU)/(1.+R)
071      ECART(NO,K)=W*T/(PI*MU)
072      ECARX(NO,K)=-2.*N*(T/MU)**2*(2.*FORCE*(R-MU)/(1.+R)+N)/AMPL
073      U=E*((1.-R)*(1.-COS(TAU))*SIFI-W*(1.+R)*SIN(TAU)*COFI)
074      B=-4.*FORCE*T*(1.+R*R+MU*(1.-R))/(MU*W*(1.+R))
075      IF(U.GT.B.AND.U.LT.0.)GO TO 19
076      ISTAB(NO,K)=2
077      GO TO 20
078      19 ISTAB(NO,K)=0
079      20 CONTINUE
080      IF(K.EQ.0)GO TO 50
081      PR(NO)=W
082      NO=NO+1
083      50 CONTINUE
084      LIGN=NO-1
085      IF(LIGN.EQ.0)GO TO 99
086      WRITE(3,80)N,R,E,MU,F,LIGN
087      80 FORMAT(1H1,' N = ',I1,'/',1X,' R = ',F4.2,'/',1X,' E = ',F5.2,'/',1X,' MU
2= ',F5.2,'/',1X,' F = ',F5.2,'/',1X,' W/WC STAB TANGENTE T/TAU
3 X1/A A VMOY XPRIM1 DELTX2',/)
088      DO 91 I=1,LIGN
089      WRITE(3,90) PR(I),(ISTAB(I,J),TT(I,J),ECART(I,J),ECARX(I,J),A(I,J
2),VMOY(I,J),XPRIM1(I,J),DELTX2(I,J),J=1,K)
090      90 FORMAT('+',I3,F6.3,4(I22,I1,3X,F7.5,2X,F7.4,2X,F7.4,2X,F8.4,1X,F8
2.6,1X,F8.4,1X,F8.5,/)')
091      CONTINUE
092      99 CONTINUE
093      100 CONTINUE
094      IF(NTEST.NE.NFOIS)GO TO 15
095      STOP
096      END

```

BAIRST

```
0001      SUBROUTINE BAIRST(A1,A2,A3,A4,A5,X,Y)
0002      DIMENSION X(4),Y(4)
0003      IS=0
0004      P=0.
0005      Q=0.
0006      101 ALPHA=0.
0007      99 PD=P+ALPHA*COS(ALPHA)/2.
0008      QO=Q+ALPHA*SIN(ALPHA)/2.
0009      L=0
0010      M=1
0011      9 B1=A1
0012      B2=A2+PD*B1
0013      5 B3=A3+PD*B2-QO*B1
0014      B4=A4+PD*B3-QO*B2
0015      B5=A5+PD*B4-QO*B3
0016      C1=A1
0017      C2=B2+PD*C1
0018      6 C3=B3+PD*C2-QO*C1
0019      C4=PD*C3-QO*C2
0020      D=C3*C3-C4*C2
0021      IF(ABS(D).GT.1.E-20) GO TO 7
0022      11 ALPHA=ALPHA+1.
0023      IF(ALPHA.LE.1000.) GO TO 99
0024      1000 RETURN
0025      7 P1=PD+(B5*C2-B4*C3)/D
0026      Q1=QO+(B5*C3-B4*C4)/D
0027      IF(L.GT.0) GO TO 110
0028      ABSOL=(ABS(P1-PD)+ABS(Q1-QO))/(ABS(P1)+ABS(Q1))
0029      IF(ABSOL.LE.1.E-3) GO TO 110
0030      M=M+1
0031      IF(M.GT.50) GO TO 11
0032      35 PD=P1
0033      QO=Q1
0034      GO TO 9
0035      110 IF(L.GE.4) GO TO 100
0036      L=L+1
0037      GO TO 35
0038      100 DIS=P1*P1-4.*Q1
0039      IS=IS+2
0040      IF(DIS) 12,13,14
0041      12 X(IS)=P1/2.
0042      X(IS-1)=P1/2.
0043      Y(IS)=SQRT(-DIS)/2.
0044      Y(IS-1)=-Y(IS)
0045      GO TO 15
0046      13 X(IS)=P1/2.
0047      X(IS-1)=P1/2.
0048      GO TO 202
0049      14 SDIS=SQRT(DIS)
0050      X(IS-1)=(P1+SDIS)/2.
0051      X(IS)=(P1-SDIS)/2.
0052      202 Y(IS-1)=0.
0053      Y(IS)=0.
0054      15 IF(IS-4)18,1000,18
```

BAIRST

```
0055      18 P1=-B2/B1
0056      Q1=B3/B1
0057      GO TO 100
0058      END
```

YLTE

```
0001      FUNCTION YLTE(A,SFI,CFI,PSI,TAU,E,W)
0002      GAMA=TAU/50.
0003      M=1
0004      10 T=M*GAMA
0005      Y=A*COS(T+PSI)+COS(W*T)*CFI-SIN(W*T)*SFI
0006      IF(E)11,11,20
0007      11 IF(Y.GT.1.)GO TO 30
0008      YLTE=2.
0009      RETURN
0010      20 IF(Y.LT.1.)GO TO 30
0011      YLTE=2.
0012      RETURN
0013      30 M=M+1
0014      IF(M-50)10,10,40
0015      40 YLTE=0.
0016      50 RETURN
0017      END
```


REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

D.D. BARKAN

Méthodes de vibration dans la construction.
1963 - Dunod - Paris.

J. VILAINÉ

Etude des vibrations forcées d'un système à un degré
de liberté avec déplacement limité d'un seul côté.
Thèse de Docteur-Ingénieur - 1967 - Nantes.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

- Z.S. BATALOVA Driving piles by the vibration method with end resistance
Mekhanika Tverdogo Tela - n°2 - 1966.
- BESPALOVA Results of modeling the problem of vibration pile driving.
Izv. vuz. Radiofizika, t.3 , n°1 - 1960.
- B. CATOIRE Théorie soviétique du fonçage des pieux.
Annales des Ponts et Chaussées, n°1, janvier 1963.
- A.E. KOBRINSKII Dynamics of mechanisms with elastic connections and impact systems.
Iliffe books Ltd - Londres 1969.
- KUSHUL-SHLYAKHTIN Vibrational sinking of a cylindrical body into an elasto-plastic medium.
Communication à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. Section des Sciences et Techniques, 13 octobre 1953.
- S.F. MASRI - On the stability of the impact damper.
T.K. CAUGHET Transactions of the A.S.M.E., septembre 1966.
- F. PETERKA Analysis of the periodic motion of impact dampers.
Revue roumaine des Sciences et Techniques.
Mécanique Appliquée, t.16, n°4, 1971.
- Y. PIRONNEAU - Mécanique des vibrations.
S. DUBIGEON E.N.S.M. Nantes.
- Y. PIRONNEAU - Mécanique non linéaire.
S. DUBIGEON E.N.S.M. Nantes
- M.G. TSEITLIN Improvement of the capacity of vibrating hammers for driving pipes into soils.
Soil Mechanics and Foundation Engineering, novembre 1973.

